Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 4

Artikel: Ein wichtiger Begriff der additiven Zahlentheorie
Autor: Trost, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1204

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band I Nr. 4 Seiten 57-72 Basel, 15. Juli 1946

Ein wichtiger Begriff der additiven Zahlentheorie

Als HILBERT 1909 den schon 1770 von WARING vermuteten Satz bewies, daß jede natürliche Zahl sich als Summe von h-ten Potenzen natürlicher Zahlen darstellen läßt, deren Anzahl eine bestimmte, nur von h abhängige Schranke nicht übersteigt, hatte damit eine lange Entwicklung einen vorläufigen Abschluß gefunden. Heute erscheint der WARING-HILBERTsche Satz als Spezialfall folgender allgemeiner Fragestellung, die als Hauptproblem der additiven Zahlentheorie bezeichnet werden kann: Welche Eigenschaften muß eine Teilfolge $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$ der Folge $N=\{1,2,3,\ldots\}$ aller natürlichen Zahlen besitzen, damit sich jede natürliche Zahl n durch eine beschränkte Anzahl von Summanden a_i aus A darstellen läßt? Es ist bemerkenswert, daß die arithmetische Natur der Zahlen a_i gar keine Rolle spielt, sondern nur die Art ihrer Verteilung bezüglich N. Diese wird beschrieben durch den von SCHNIRELMANN eingeführten Begriff der *Dichte* einer Zahlenfolge. Da durch diese Begriffsbildung eine allgemeine Einsicht in die Darstellungsprobleme möglich wird, ist ein kurzer Überblick gerechtfertigt. Für ein eingehenderes Studium sei auf den ausführlichen Bericht von ROHRBACH[1]) verwiesen, der die ganze einschlägige Literatur berücksichtigt.

Es bedeute $A(x)$ die Anzahl der $a_i \leqq x$ aus der Folge A. Unter der Dichte α von A versteht man die untere Grenze der Quotienten $\frac{A(x)}{x}$. Es ist also $A(x) \geqq \alpha x$ für alle $x>0$, wobei $0 \leqq \alpha \leqq 1$. α kann nur positiv sein, wenn $a_1=1$; das sei deshalb für alle betrachteten Folgen vorausgesetzt.

Beispiel: $A=\{1, 2, 4, 7, 11, 18, 23, 25, 28, 31, 31+3t, \ldots\}$[2]), $\alpha=\frac{3}{11}$.

Wegen $\frac{p}{q} < \frac{p+1}{q+1}$ für $p<q$ hat $\frac{A(x)}{x}$ ein relatives Minimum unmittelbar vor einem einzelnen a_i oder einer «Sequenz» mehrerer aufeinanderfolgender Elemente a. Man kann α also auch als untere Grenze der Quotienten $\frac{i-1}{a_i-1}$ erklären. Somit ist $i-1 \geqq \alpha(a_i-1)$ und

$$a_i \leqq 1+\left[\frac{i-1}{\alpha}\right],$$

wo $[\omega]$ die größte in der reellen Zahl ω enthaltene ganze Zahl bedeutet. Stellen wir

[1]) H. ROHRBACH, Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie, Jber. dtsch. Math. Vereinig. *48*, 199—236 (1938).

[2]) Hier wie in den folgenden Beispielen soll t die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen.

die Elemente a_i der Folge A als Gitterpunkte $(a_i-1;\ i-1)$ in einem Kartesischen Koordinatensystem dar, so liegen diese alle innerhalb oder auf dem Rand des von den Geraden $y=\alpha x$ und $y=x$ im ersten Quadranten abgegrenzten Winkelraumes. Dabei muß auf $y=\alpha x$ neben $(0;\ 0)$ mindestens noch ein weiterer Punkt der Folge liegen. Man kann also die Elemente a_i unter Beibehaltung der Reihenfolge weitgehend verschieben, ohne die Dichte der Folge zu ändern. Aus $\alpha=1$ folgt $A=N$.

Zu jeder positiven rationalen Zahl $\alpha=\frac{p}{q}$, $p<q$, $(p,\ q)=1$ läßt sich eine Folge A der Dichte α so konstruieren, daß

$$a_i=1+\left[\frac{i-1}{\alpha}\right]=1+\left[\frac{q(i-1)}{p}\right].$$

Hier ist $\frac{i-1}{a_i-1}=\frac{p}{q}$ nur für $i=mp+1$ $(m=1,2,3,\ldots)$.

Diese Folge heiße Normalfolge der Dichte α. Jede andere Folge A der Dichte α hat mit der Normalfolge sicher ein Element $a_{mp+1}=mq+1$ gemeinsam. Man kann A aus der Normalfolge ableiten, indem man dieses Element festhält und die übrigen geeignet nach links verschiebt.

Beispiele für Normalfolgen: $\alpha=\frac{3}{11}$ $\quad A=\{1,\ 4,\ 8,\ 12,\ 15,\ 19,\ 23,\ 26,\ \ldots\}$.

Arithmetische Reihe: $\alpha=\frac{1}{d}$ $\quad$ (d ganz) $\quad a_i=1+(i-1)\,d$.

Um den Zugang zu dem in der Einleitung erwähnten allgemeinen Darstellungsproblem zu erhalten, definiert man als *Summe* von $s\geqq 2$ beliebigen Folgen $A_1=\{a_{i_1}\}$, $A_2=\{a_{i_2}\},\ldots$ die Folge C aller verschiedenen positiven Zahlen von der Form

$$c_i=\varepsilon_1 a_{i_1}+\varepsilon_2 a_{i_2}+\cdots+\varepsilon_s a_{i_s} \qquad (\varepsilon_\nu=0 \text{ oder } 1).$$

Beispiel:

$$A=\{1,6,7,15,17,18,18+t,\ldots\}, \qquad \alpha=\frac{1}{5},$$

$$B=\{1,7,16,17,17+t,\ldots\}, \qquad \beta=\frac{2}{15},$$

$$C=A+B=\{1,2,6,7,8,13,14,14+t,\ldots\}, \qquad \gamma=\frac{2}{5}.$$

Die so definierte Summenbildung ist assoziativ, es ist also symbolisch geschrieben

$$C=A_1+(A_2+A_3+\cdots+A_s)=A_1+A_2+\cdots+A_s.$$

Man kann sich beim Studium der Summe somit auf den Fall $s=2$ beschränken. Von besonderer Wichtigkeit ist der Spezialfall $A_1=A_2=\cdots=A_s$. Man schreibt $C=sA$. Es lassen sich alle natürlichen Zahlen mit einer beschränkten Anzahl von Summanden aus A darstellen, wenn es eine endliche Zahl k gibt, so daß $kA=N$. Die kleinstmögliche Zahl k heißt *Ordnung* von A. Die allgemeine Lösung des Darstellungsproblems wird gegeben durch den

Hauptsatz: Jede Folge von positiver Dichte besitzt eine endliche Ordnung.

Als ersten Schritt zum Beweis des Hauptsatzes hat man die Dichte γ der Summe $C=A+B$ mittels der Dichten α und β der Summanden abzuschätzen. Nach LANDAU gilt

$$(*) \qquad \gamma\geqq\alpha+\beta-\alpha\beta$$

Beweis: Man erhält sicher folgende verschiedene $c_i \leqq x$:

1. $A(x) \geqq \alpha x$ Zahlen aus A: $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_{A(x)}$,
2. je $B(a_{i+1} - a_i - 1) \geqq \beta(a_{i+1} - a_i - 1)$ Zahlen $a_i + b_r$ zwischen a_i und a_{i+1}, $1 \leqq i < A(x)$,
3. $B(x - a_{A(x)}) \geqq \beta(x - a_{A(x)})$ Zahlen $a_{A(x)} + b_r \leqq x$.

Durch Addition ergibt sich

$$\begin{aligned} C(x) &\geqq A(x) + \beta(a_{A(x)} - a_1 - (A(x) - 1) + x - a_{A(x)}) \\ &= A(x) + \beta(x - A(x)) = \beta x + (1 - \beta) A(x) \\ &\geqq \beta x + (1 - \beta)\alpha x = (\alpha + \beta - \alpha\beta) x \qquad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Ist $\alpha = \beta$, so folgt $\gamma \geqq 2\alpha - \alpha^2 = 1 - (1 - \alpha)^2$.
Wegen $\alpha + 1 - (1 - \alpha)^h - \alpha[1 - (1 - \alpha)^h] = \alpha + (1 - \alpha)[1 - (1 - \alpha)^h] = 1 - (1 - \alpha)^{h+1}$ erhält man für die Dichte γ_k von kA durch vollständige Induktion

$$\gamma_k \geqq 1 - (1 - \alpha)^k.$$

Für $\alpha + \beta \geqq 1$ läßt sich sofort $\gamma = 1$ nachweisen. Wir dürfen $\alpha > 0$ voraussetzen, weil sonst $\beta \geqq 1$ und $B = N$. Liegt $x > 1$ nicht bereits in A, so ist $A(x-1) = A(x) \geqq \alpha x > \alpha(x-1)$. Es gibt $B(x-1)$ positive Zahlen $x - b_s \leqq x - 1$. Wegen

$$A(x-1) + B(x-1) > (\alpha + \beta)(x-1) \geqq x - 1$$

ist einmal $a_r = x - b_s$, also $x = a_r + b_s$, w.z.b.w. Hat A eine Dichte $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, so ist somit $2A = N$, das heißt A hat die Ordnung 2. Ist A zum Beispiel die Folge der abundanten[1]) Zahlen inklusive der vollkommenen Zahlen, so ist nach BEHREND $A(x) < 0{,}47x$. Die Folge der defizienten Zahlen, die neben 1 auch alle Primzahlen enthält, hat somit eine Dichte $\beta \geqq 0{,}53$. Es läßt sich also jede natürliche Zahl als Summe zweier defizienter Zahlen darstellen.

Ist $\alpha < \frac{1}{2}$, so bestimme man die kleinste natürliche Zahl m, so daß $1 - (1 - \alpha)^m \geqq \frac{1}{2}$, dann ist $2(mA) = 2mA = N$, und für die Ordnung von A gilt: $k \leqq 2m$. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Aus der m bestimmenden Ungleichung folgt

$$\tfrac{1}{2} \geqq (1 - \alpha)^m, \quad -\ln \tfrac{1}{2} \leqq -m \ln(1 - \alpha),$$

$$m \geqq \frac{\ln 2}{-\ln(1 - \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln 2}{1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3} + \cdots} < \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Das liefert eine neue, allgemein gültige Abschätzung für die Ordnung k aus α:

$$k \leqq 2m = \left[\frac{2 \ln 2}{\alpha}\right] + 1 = \left[\frac{1{,}39}{\alpha}\right] + 1.$$

Für genügend große α ist diese Abschätzung genau, zum Beispiel $\alpha = \frac{4}{5}$, $k = 2$.

Will man die Schranke für k verbessern, so muß die Abschätzung (*) für die Dichte γ von $A + B$ verbessert werden. Wegen $\gamma = 1$ für $\alpha + \beta \geqq 1$ erscheint es wahrscheinlich, daß allgemein $\gamma \geqq \alpha + \beta$ gilt. Für spezielle Folgen, zum Beispiel Normalfolgen, kann

[1]) Eine Zahl heißt abundant, vollkommen oder defizient, je nachdem die Summe ihrer echten Teiler (multiplikativer Inhalt) größer, gleich oder kleiner als die Zahl selbst ist.

diese Vermutung leicht bestätigt werden. Merkwürdigerweise ist aber bis heute noch kein allgemeiner Beweis bekannt geworden, obwohl sich zahlreiche Autoren mit der Untersuchung von γ beschäftigt haben. Nur für den Spezialfall $\alpha = \beta$ hat KHINTCHINE durch eine komplizierte, aber elementare Induktion $\gamma \geqq 2\alpha$ und damit $\gamma_k \geqq k\alpha$ beweisen können. Aus diesem Resultat ergibt sich als Verbesserung der oben hergeleiteten Abschätzung für die Ordnung von A

$$k \leqq \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1.$$

Die hier mitgeteilten Resultate haben eine Bedeutung nur für Mengen positiver Dichte. Für diese ist das Darstellungsproblem vollständig elementar. Die klassischen Folgen F (Quadratzahlen, h-te Potenzen, Polygonalzahlen, Primzahlen inklusive 1) haben jedoch verschwindende Dichte. Man kann aber zeigen, daß mF bei genügend großem m positive Dichte hat. Für die Folge der Primzahlen inklusive 1 ist nach SCHNIRELMANN $m = 2$, somit hat diese Folge eine endliche Ordnung k. (Aus der Richtigkeit der GOLDBACHschen Vermutung würde $k = 3$ folgen.) Für die Quadratzahlen ist bekanntlich $k = 4$, während die Dichte von $2F$ noch verschwindet. Es ist also möglich, daß die Summenfolge zweier Folgen der Dichte 0 die Dichte 1 hat.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Hauptaufgabe beim Beweis des Darstellungsproblems für eine gegebene Folge die Berechnung ihrer Dichte oder derjenigen einer Summenfolge ist, doch ist dies meist nur mit analytischen Hilfsmitteln möglich.

E. TROST, Zürich

Mathematische Aufgaben aus dem Gebiete der Gasreaktionen[1])

Reaktionen vom Typus $A \rightarrow B$: $i = 0$.

Beispiele[2]):

$$C_{fest} + O_2 \rightarrow CO_2$$
$$3\,Fe_{fest} + 4\,H_2O \rightarrow Fe_3O_4 + 4\,H_2$$

Bei beliebigen Anfangswerten der Gasphasen erhält man lineare Gleichungen für die Umsatzgröße x, sowohl in molaren Konzentrationen als in Partialdrucken. Die q sind direkt berechenbar, ebenso $\overline{M}$.

Reaktionen vom Typus $A \rightarrow 2\,B$: $i = -1$.

Beispiele:

$$Cl_2 \rightarrow 2\,Cl$$
$$H_2 \rightarrow 2\,H$$
$$N_2O_4 \rightarrow 2\,NO_2$$
$$C_{fest} + O_2 \rightarrow 2\,CO\ ^{2)}$$

---

[1]) Siehe Heft Nr. 3, S. 46–53.

[2]) Die festen Phasen scheiden aus der Gleichgewichtsgleichung aus, da ihre Dampfkonzentration vernachlässigbar klein ist.