Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1209

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band I Nr. 6 Seiten 97–112 Basel, 15. November 1946

Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter

Die Tatsache, daß ein ebenes Gitter neben zweizähligen Drehungen höchstens drei-, vier- oder sechszählige Drehungen in sich zuläßt, kann zum Ausdruck gebracht werden durch folgenden

Satz: Es existiert kein einfaches oder sich selbst durchdringendes reguläres n-Eck, dessen Ecken sämtlich Punkte eines ebenen Gitters sind, ausgenommen in den Fällen $n = 3$, 4 *und* 6.

Zu diesem Satz gibt es ein anschaulich suggestives Beweisverfahren, das ich hier mitteile, da es Herrn HADWIGER Anlaß zu einer arithmetischen Folgerung gegeben hat[1]).

Beweis: Wir betrachten ein n-Eck von der im Satze bestrittenen Art, wobei wir überdies $n \neq 5$, also

$$n > 6 \tag{1}$$

annehmen wollen.

Verbinden wir jede Ecke mit den beiden ihr am nächsten liegenden Ecken, so entsteht in jedem Falle ein *einfaches* reguläres n-Eck $\mathfrak{P}$, dessen Seitenlänge s sei. Wir durchlaufen seine Ecken ausgehend von einer Ecke P_1 in positivem Sinne und erhalten die Eckpunktserie

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n. \tag{2}$$

Tragen wir nun die Gittervektoren

$$\overrightarrow{P_nP_1}, \quad \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \tag{3}$$

mit ihren Anfangspunkten von irgendeinem Gitterpunkte P_0 aus auf, so liefern ihre Endpunkte eine Serie von Gitterpunkten

$$P_1', \quad P_2', \quad \ldots, \quad P_n', \tag{2'}$$

die wiederum ein einfaches reguläres n-Eck $\mathfrak{P}'$ bilden, dessen Seitenlänge s' sich berechnet aus dem Verhältnis

$$\frac{s'}{s} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1. \tag{4}$$

[1]) H. HADWIGER: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie; El. Math., Bd. I, Nr. 6, S. 98.

Ausschlaggebend ist nun, daß dieses Verkleinerungsverhältnis nur von n abhängt. Iterieren wir also die Konstruktion, so erhalten wir eine unbegrenzte Serie von regulären Gitter-n-Ecken

$$\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}^{(\nu)}, \quad \ldots$$

deren Seiten gegen Null konvergieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, da ein Gitter nicht beliebig kleine Gittervektoren enthalten kann, w.z.b.w.

Ein den Sonderfall $n = 5$ ebenfalls umfassendes Verfahren erhält man, wenn man die Vektoren

$$\overrightarrow{P_n P_{n-1}}, \quad \overrightarrow{P_1 P_n}, \quad \ldots, \quad \overrightarrow{P_{n-2} P_{n-1}} \tag{5}$$

sukzessive von den Punkten der Serie (2) aus abträgt. Das Verkleinerungsverhältnis wird dann

$$\frac{s'}{s} = \left| 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \right| < 1 \tag{6}$$

und die resultierenden Gitter-n-Ecken liegen konzentrisch zu $\mathfrak{P}$.

W. SCHERRER, Bern

Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie

Es gibt abzählbar unendlich viele rationale Winkel

$$\varphi = 2\pi \frac{p}{q}, \quad 0 \leqq p < q; \quad p, q \text{ ganz und } (p, q) = 1, \tag{1}$$

deren Gradmaß also rational ist; dagegen sind nur einige wenige derartige rationale Winkel bekannt, für die wenigstens eine der vier trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$ einen ebenfalls rationalen endlichen Wert annimmt. Diese bekannten elementaren Winkel, wir wollen sie goniometrische Hauptwinkel nennen, sind im Gradmaß angeschrieben

$$\varphi = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 120^0, 135^0, 150^0, 180^0, 210^0, 225^0, 240^0, 270^0, 300^0, 315^0\, 330^0. \tag{2}$$

Um diese Rationalitätsverhältnisse bei allen vier trigonometrischen Funktionen vollständig zu überblicken, genügt es im Hinblick auf die goniometrischen Umrechnungsformeln durchaus, die Verhältnisse etwa bei der Funktion $\cos\varphi$ zu kennen. Diese Funktion wird bekanntlich für die folgenden Hauptwinkel rational

$$\varphi = 0^0, 60^0, 90^0, 120^0, 180^0, 240^0, 270^0, 300^0. \tag{3}$$

In dieser Note möchte ich einen kurzen Beweis dafür mitteilen, daß diese 8 Winkel (3) die einzigen rationalen Winkel des Grundintervalls $0 \leqq \varphi < 360^0$ sind, für die $\cos\varphi$ rational ausfällt[1]). Damit ist auch bewiesen, dass die 16 goniometrischen Haupt-

[1]) Das Kernstück des vorliegenden Beweises stellt die arithmetische Übertragung eines geometrisch anschaulichen Beweisgedankens, den ich Herrn W. SCHERRER verdanke, dar; vgl. die vorstehende Note: W. SCHERRER, Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter.