Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 1

Artikel: Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist
Autor: Buchner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12814

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

Gewöhnlich wird nur gezeigt, daß einige klassische geometrische Aufgaben, wie die Dreiteilung eines Winkels, die Volumenverdoppelung eines Würfels, die Konstruktion gewisser regelmässiger Polygone, die Quadratur eines Kreises, mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können. Zahlreiche andere Fragen der elementaren Geometrie führen ebenfalls auf solche Probleme.

Ein Ingenieur berichtete mir, daß er sich schon lange vergeblich bemühe, eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und dem Inkreisradius ϱ zu

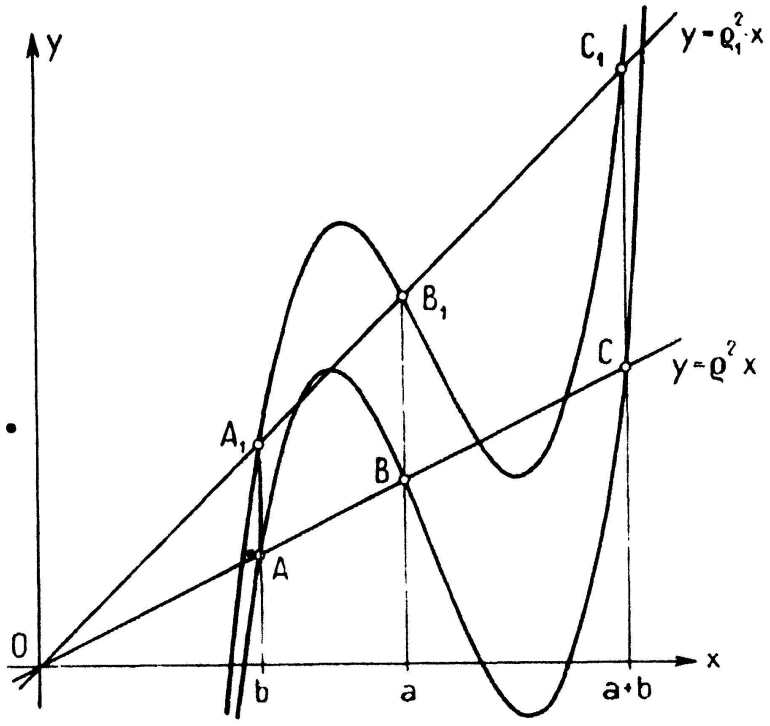

Fig. 1

finden. Es soll gezeigt werden, daß es eine solche Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht gibt.

Es sei $a \geqq b$. Als viertes Stück bestimmen wir die halbe Seitensumme $s = \frac{a+b+c}{2}$, dann gilt bekanntlich

$$\varrho^2 = \frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s} = \frac{(s-a)\,(s-b)\,(a+b-s)}{s}.$$

Wir erhalten daher für die Unbekannte $x = s$ die Bestimmungsgleichung dritten Grades

$$f(x) = (x-a)\,(x-b)\,(x-a-b) + \varrho^2 x$$

$$= x^3 - 2x^2(a+b) + x(\varrho^2 + 3ab + a^2 + b^2) - ab(a+b) = 0. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$f(0) = -ab(a+b) < 0, \quad f(b) = \varrho^2 b, \quad f(a) = \varrho^2 a, \quad f(a+b) = \varrho^2(a+b). \tag{2}$$

Die Gleichung (1) hat daher immer eine reelle Wurzel $0 < x_1 < b$.

In einem Dreieck gilt stets

$$x = s = \frac{a+b+c}{2} > a \geqq b, \quad \text{und} \quad \frac{c}{2} < \frac{a+b}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{a+b+c}{2} < a+b, \quad \text{oder} \quad a+b > x = s > a.$$

Lösungen unseres Problems liefern daher nur Wurzeln der Gleichung (1), die dem Intervall $(a; a+b)$ angehören. Da die Gleichung (1) stets eine reelle Wurzel besitzt, die außerhalb dieses Intervalles liegt, so hat unsere Aufgabe nur Lösungen, wenn die Gleichung drei reelle Wurzeln hat.

Die Kurve $y = f(x)$ schneidet nach (2) die Gerade $y = \varrho^2 x$ immer in den drei Punkten $A\,(b \mid \varrho^2 b)$, $B\,(a \mid \varrho^2 a)$, $C\,\big(a+b \mid \varrho^2 (a+b)\big)$, da außerdem $f(0) < 0$ ist, können die weiteren Nullstellen von $f(x)$ nur zwischen a und $a+b$ liegen. Unser Problem hat daher für ein gegebenes Wertetripel a, b, ϱ entweder 0, 1 oder 2 Lösungen, je nachdem die Gleichung (1) eine reelle Wurzel, eine Doppelwurzel oder drei verschiedene reelle Wurzeln hat.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

hat drei reelle Wurzeln, wenn ihre Diskriminante

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18\, a_1 a_2 a_3 - 4\, a_1^3 a_3 - 4\, a_2^3 - 27\, a_3^2 \geqq 0$$

ist. In unserem Falle ist

$$a_1 = -2(a+b), \quad a_2 = \varrho^2 + 3ab + a^2 + b^2, \quad a_3 = -ab(a+b),$$

und somit ergibt sich

$$D = -4\varrho^6 - 4\varrho^4 (2a^2 + 7ab + 2b^2)$$
$$-4\varrho^2 (a^4 - a^3 b - a^2 b^2 - ab^3 + b^4) + a^2 b^2 (a-b)^2 \geqq 0.$$

Zu jedem Tripel a, b, ϱ, welches dieser Ungleichung genügt, gibt es Dreiecke mit den Seiten a, b und dem Inkreisradius ϱ, aber ob dieselben mit Zirkel und Lineal gefunden werden können, ist damit noch nicht entschieden. Für die speziellen Werte $a = 2$ und $b = 1$ wird

$$D = -4(\varrho^6 + 24\varrho^4 + 3\varrho^2 - 1) \geqq 0.$$

Nach der Zeichenregel von DESCARTES hat die Gleichung

$$\varrho^6 + 24\varrho^4 + 3\varrho^2 - 1 = 0.$$

eine positive Wurzel, und zwar ist $\varrho_1 \approx 0{,}388$.

Mit $a = 2$, $b = 1$ gibt jedes $\varrho \leqq 0{,}388$ ein Zahlentripel, das zu einem reellen Dreieck gehört. Insbesondere für $a = 2$, $b = 1$, $\varrho = 0{,}3$ nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$x^3 - 6x^2 + 11{,}09\, x - 6 = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit 1000 und setzen

$$10x = y + 20,$$

dann erhalten wir eine Gleichung in der Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten

$$g(y) = y^3 - 91\,y + 180 = 0\,. \tag{3}$$

Eine solche Gleichung hat entweder reelle ganzzahlige oder irrationale Wurzeln. Wegen

$$g(-11) = -150, \quad g(-10) = 90, \quad g(2) = 6, \quad g(3) = -66, \quad g(8) = -36, \quad g(9) = 90,$$

gilt für die drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$-11 < y_1 < -10, \quad 2 < y_2 < 3, \quad 8 < y_3 < 9\,.$$

Die Gleichung (3) hat demnach keine rationalen Wurzeln. Eine kubische Gleichung

$$y^3 + a\,y + b = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist aber auch nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar[1]). Die Wurzeln der Gleichung (3) sind daher nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, daher gibt es auch für die allgemeine Aufgabe keine solche Konstruktion, denn diese müßte unser spezielles Beispiel mitumfassen.

Natürlich ist das nicht so zu verstehen, daß es keine Tripel a, b, ϱ gibt, aus denen das zugehörige Dreieck konstruierbar wäre. Ist zum Beispiel $a = 5$, $b = 3$, $\varrho = 1$, dann heißt die Gleichung (1)

$$x^3 - 16\,x^2 + 80\,x - 120 = (x - 6)\,(x^2 - 10\,x + 20) = 0\,,$$

das heißt sie ist reduzibel geworden. Die Lösungen

$$x_1 = s_1 = 6 \quad \text{und} \quad x_2 = s_2 = 5 + \sqrt{5}$$

führen zu den Dreiecken mit den Seiten $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ und $a = 5$, $b = 3$, $c = 2 + 2\sqrt{5}$, die aus den gegebenen Zahlenwerten leicht konstruierbar sind. Es gibt aber keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die in jedem Falle zum Ziele führen würde.

P. Buchner, Basel

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

35. Jahresversammlung, 8. September 1946, Zürich

Programm

J.-P. Sydler (Zürich): Hyperquadriques de révolution et droites associées.

E. Specker (Zürich): Über den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppen und zweiten Homotopiegruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

H. Bieri (Bern): Eine neue Methode zur Lösung von Randwertproblemen der Variationsrechnung.

P. Bidal (Lausanne): Déterminants, dont les éléments sont des formes à multiplication extérieure.

---

[1]) Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, 3. Aufl., § 109.