Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

Autor(en): **Buchner, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12814

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Eine Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal nicht lösbar ist

Gewöhnlich wird nur gezeigt, daß einige klassische geometrische Aufgaben, wie die Dreiteilung eines Winkels, die Volumenverdoppelung eines Würfels, die Konstruktion gewisser regelmässiger Polygone, die Quadratur eines Kreises, mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden können. Zahlreiche andere Fragen der elementaren Geometrie führen ebenfalls auf solche Probleme.

Ein Ingenieur berichtete mir, daß er sich schon lange vergeblich bemühe, eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und dem Inkreisradius ϱ zu

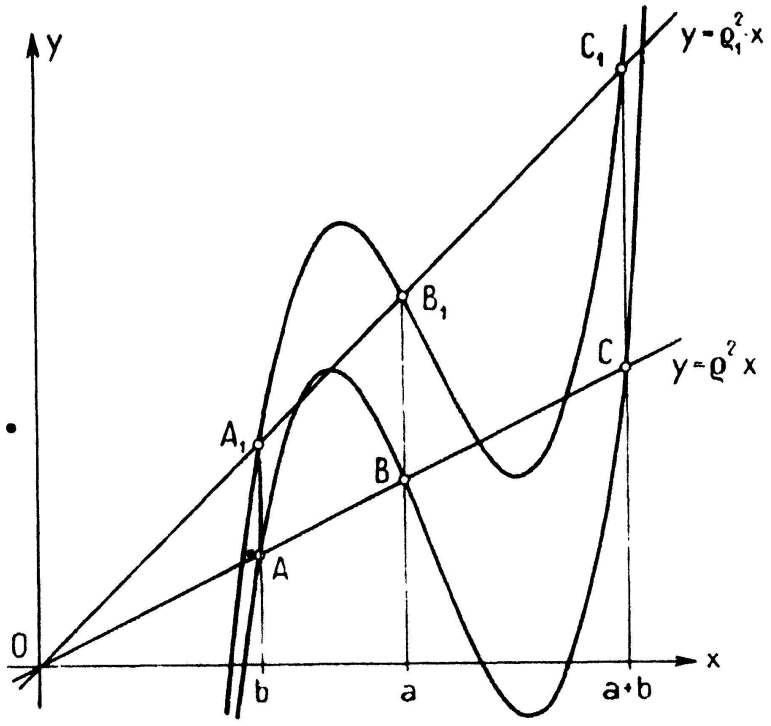

Fig. 1

finden. Es soll gezeigt werden, daß es eine solche Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht gibt.

Es sei $a \geqq b$. Als viertes Stück bestimmen wir die halbe Seitensumme $s = \frac{a+b+c}{2}$, dann gilt bekanntlich

$$\varrho^2 = \frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s} = \frac{(s-a)\,(s-b)\,(a+b-s)}{s}.$$

Wir erhalten daher für die Unbekannte $x = s$ die Bestimmungsgleichung dritten Grades

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-a-b) + \varrho^2 x$$

$$= x^3 - 2x^2(a+b) + x(\varrho^2 + 3ab + a^2 + b^2) - ab(a+b) = 0. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$f(0) = -ab(a+b) < 0, \quad f(b) = \varrho^2 b, \quad f(a) = \varrho^2 a, \quad f(a+b) = \varrho^2(a+b). \tag{2}$$

Die Gleichung (1) hat daher immer eine reelle Wurzel $0 < x_1 < b$.

In einem Dreieck gilt stets

$$x = s = \frac{a+b+c}{2} > a \geqq b, \quad \text{und} \quad \frac{c}{2} < \frac{a+b}{2}, \text{ also}$$

$$\frac{a+b+c}{2} < a+b, \quad \text{oder} \quad a+b > x = s > a.$$

Lösungen unseres Problems liefern daher nur Wurzeln der Gleichung (1), die dem Intervall $(a; a+b)$ angehören. Da die Gleichung (1) stets eine reelle Wurzel besitzt, die außerhalb dieses Intervalles liegt, so hat unsere Aufgabe nur Lösungen, wenn die Gleichung drei reelle Wurzeln hat.

Die Kurve $y = f(x)$ schneidet nach (2) die Gerade $y = \varrho^2 x$ immer in den drei Punkten $A\,(b \mid \varrho^2 b)$, $B\,(a \mid \varrho^2 a)$, $C\,(a+b \mid \varrho^2 (a+b))$, da außerdem $f(0) < 0$ ist, können die weiteren Nullstellen von $f(x)$ nur zwischen a und $a+b$ liegen. Unser Problem hat daher für ein gegebenes Wertetripel a, b, ϱ entweder 0, 1 oder 2 Lösungen, je nachdem die Gleichung (1) eine reelle Wurzel, eine Doppelwurzel oder drei verschiedene reelle Wurzeln hat.

Die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

hat drei reelle Wurzeln, wenn ihre Diskriminante

$$D = a_1^2 a_2^2 + 18\, a_1 a_2 a_3 - 4\, a_1^3 a_3 - 4\, a_2^3 - 27\, a_3^2 \geqq 0$$

ist. In unserem Falle ist

$$a_1 = -2\,(a+b), \quad a_2 = \varrho^2 + 3\,ab + a^2 + b^2, \quad a_3 = -ab\,(a+b),$$

und somit ergibt sich

$$D = -4\varrho^6 - 4\varrho^4 (2a^2 + 7ab + 2b^2)$$
$$-4\varrho^2 (a^4 - a^3 b - a^2 b^2 - a b^3 + b^4) + a^2 b^2 (a-b)^2 \geqq 0.$$

Zu jedem Tripel a, b, ϱ, welches dieser Ungleichung genügt, gibt es Dreiecke mit den Seiten a, b und dem Inkreisradius ϱ, aber ob dieselben mit Zirkel und Lineal gefunden werden können, ist damit noch nicht entschieden. Für die speziellen Werte $a = 2$ und $b = 1$ wird

$$D = -4\,(\varrho^6 + 24\varrho^4 + 3\varrho^2 - 1) \geqq 0.$$

Nach der Zeichenregel von DESCARTES hat die Gleichung

$$\varrho^6 + 24\varrho^4 + 3\varrho^2 - 1 = 0.$$

eine positive Wurzel, und zwar ist $\varrho_1 \approx 0{,}388$.

Mit $a = 2$, $b = 1$ gibt jedes $\varrho \leqq 0{,}388$ ein Zahlentripel, das zu einem reellen Dreieck gehört. Insbesondere für $a = 2$, $b = 1$, $\varrho = 0{,}3$ nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$x^3 - 6\,x^2 + 11{,}09\,x - 6 = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit 1000 und setzen

$$10\,x = y + 20,$$

dann erhalten wir eine Gleichung in der Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten

$$g(y) = y^3 - 91\,y + 180 = 0\,. \tag{3}$$

Eine solche Gleichung hat entweder reelle ganzzahlige oder irrationale Wurzeln. Wegen

$$g(-11) = -150, \quad g(-10) = 90, \quad g(2) = 6, \quad g(3) = -66, \quad g(8) = -36, \quad g(9) = 90,$$

gilt für die drei Wurzeln der Gleichung (3)

$$-11 < y_1 < -10, \quad 2 < y_2 < 3, \quad 8 < y_3 < 9\,.$$

Die Gleichung (3) hat demnach keine rationalen Wurzeln. Eine kubische Gleichung

$$y^3 + a\,y + b = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, die keine rationale Wurzel hat, ist aber auch nicht durch eine Kette von Quadratwurzeln lösbar[1]). Die Wurzeln der Gleichung (3) sind daher nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar, daher gibt es auch für die allgemeine Aufgabe keine solche Konstruktion, denn diese müßte unser spezielles Beispiel mitumfassen.

Natürlich ist das nicht so zu verstehen, daß es keine Tripel a, b, ϱ gibt, aus denen das zugehörige Dreieck konstruierbar wäre. Ist zum Beispiel $a = 5$, $b = 3$, $\varrho = 1$, dann heißt die Gleichung (1)

$$x^3 - 16\,x^2 + 80\,x - 120 = (x-6)\,(x^2 - 10\,x + 20) = 0\,,$$

das heißt sie ist reduzibel geworden. Die Lösungen

$$x_1 = s_1 = 6 \quad \text{und} \quad x_2 = s_2 = 5 + \sqrt{5}$$

führen zu den Dreiecken mit den Seiten $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$ und $a = 5$, $b = 3$, $c = 2 + 2\sqrt{5}$, die aus den gegebenen Zahlenwerten leicht konstruierbar sind. Es gibt aber keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die in jedem Falle zum Ziele führen würde.

P. Buchner, Basel

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

35. Jahresversammlung, 8. September 1946, Zürich

Programm

J.-P. Sydler (Zürich): Hyperquadriques de révolution et droites associées.

E. Specker (Zürich): Über den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppen und zweiten Homotopiegruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

H. Bieri (Bern): Eine neue Methode zur Lösung von Randwertproblemen der Variationsrechnung.

P. Bidal (Lausanne): Déterminants, dont les éléments sont des formes à multiplication extérieure.

---

[1]) Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, 3. Aufl., § 109.