Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ren soll, so muß P mit A zusammenfallen. Die Basis der speziellen E wird daher $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Demnach gilt $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots i \cdot i$.

Hier lassen sich die üblichen Betrachtungen über die Eigenschaften der Zahl e anschließen.

5. *Bestimmung der Konstanten k.* Nachdem dann e als Basis der natürlichen Logarithmen eingeführt worden ist, kann $a = e^{\ln a}$ und $y = a^x = e^{x \ln a}$ geschrieben werden. Durch Differenzieren folgt: $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$; also ergibt sich, daß $k = \ln a$ ist.

6. *Die Logarithmusfunktionen.* Durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ folgt aus $y = e^x$ die Logarithmusfunktion $x = e^y$ oder $y = \ln x$. Das Differenzieren von $x = e^y$ ergibt $1 = e^y \cdot y'$ oder $y' = (\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$. Wird aber $y = a^x$ an der Geraden $y = x$ gespiegelt, so ergibt sich $x = a^y$ oder $y = \log_a x$ und durch Logarithmieren von $x = a^y$ folgt $\ln x = y \ln a$ und durch Differenzieren dieser Gleichung $\frac{1}{x} = y' \cdot \ln a$, also $y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$.

F. MEYER, Bern.

Aufgaben

Eine weitere Lösung zu Aufgabe 1: Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER.

L'énoncé peut se préciser comme suit sans en altérer le caractère: Etant donnés cinq points numérotés du plan, à quelle condition peut-on tracer un pentagone régulier convexe, dont les côtés (prolongés au besoin) passent successivement par les cinq points donnés, lorsque le polygone est parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire en maintenant l'intérieur à gauche?

En cas de possibilité, on demande une construction effective.

1. Nous allons démontrer ce qui suit:

Il existe en général un et un seul polygone régulier convexe à n sommets, dont les quatre premiers côtés, dans le sens de parcours positif, passent successivement par quatre points donnés P_1, P_2, P_3, P_4 du plan.

A chaque triple P_1, P_2, P_3 correspond cependant un point singulier d'indice n; lorsque P_4 est situé en ce point, il existe une infinité de polygones satisfaisant à la condition énoncée; il en est un et un seul dont le cinquième côté passera par un cinquième point donné P_5, à moins que P_5 ne soit à son tour le point singulier d'indice n relatif au triple P_2, P_3, P_4; en ce cas particulier, on peut faire passer le sixième côté par un sixième point quelconque donné P_6; et ainsi de suite indéfiniment.

Pour cet énoncé on supposera le polygone parcouru (en sens positif) autant de fois qu'il le faudra, le $(n + k)^e$ côté étant identique au k^e. On dit pour abréger que ce côté passe par un point P_k, en entendant éventuellement que c'est son prolongement qui passe par ce point. L'indice n est un entier donné quelconque supérieur à 2.

On en déduit, pour le cas particulier $n = 5$, que la construction du pentagone demandé ne sera possible en général que si le cinquième point, P_5, est situé sur une droite déterminée par les quatre premiers, P_1, P_2, P_3, P_4. Elle sera encore possible cependant, quel que soit P_5, si P_4 est singulier d'indice 5 relatif aux trois points précédents. La réponse sera unique dans les deux cas, à moins que P_4 et P_5 soient tous deux singuliers d'indice 5 relatifs aux trois points qui les précèdent.

2. Voici la construction effective dans le cas général:

(I) Sur la base $P_k P_{k+1}$, on cherche le sommet S_k du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $2\pi/n$ radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de $S_k P_k$ à $S_k P_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3)$.

(II) Sur la base $S_k S_{k+1}$, on cherche le sommet A_k du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $4\,\pi/n$ radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de $A_k S_k$ à $A_k S_{k+1}$ $(k = 1, 2)$.

(III) Avec centre A_k, on trace le cercle C_k passant par S_k et S_{k+1} $(k = 1, 2)$.

(IV) L'intersection autre que S_2, des deux cercles C_1 et C_2 est *le centre C du polygone cherché*. Au cas où les deux cercles coïncident, tout point de $C_1 = C_2$ est admissible comme centre. Sinon, C est unique et bien déterminé.

(V) On mène par le point P_1 la parallèle à la droite $C S_1$, puis on la fait tourner autour de P_1 de l'angle complémentaire à π/n radians, dans le sens positif de la mesure des angles. La droite ainsi trouvée est *le premier côté, prolongé, du polygone cherché*. Il faudra lui donner un *sens de parcours* maintenant le centre C à gauche. Pour avoir le k^e côté du polygone cherché, on n'a qu'à mener par P_k la droite dirigée faisant avec le premier côté dirigé un angle de $2\,(k-1)\,\pi/n$ radians, dans le sens positif de la mesure des angles.

La construction (V) réussit chaque fois que le centre C déterminé par (IV) se distingue bien du point S_1. Il y a exception si $S_1 = S_2$: *P_1, P_2, P_3 sont alors les trois premiers sommets d'un certain polygone régulier convexe Π_0 à n sommets, dans le sens de parcours positif*. En ce cas, on substitue à la construction (V) la construction:

(V′) On mène par le point P_3 la parallèle à la droite $C S_3$, puis on la fait tourner autour de P_3 de l'angle complémentaire à π/n, dans le sens positif de la mesure des angles. Ce sera *le troisième côté* du polygone cherché, qu'on dotera du sens de parcours laissant le centre C à gauche. Le k^e côté formera avec celui-là un angle de $2\,(k-3)\,\pi/n$ radians dans le sens positif. Si cependant *P_4 se trouvait au quatrième sommet du polygone Π_0*, $S_1 = S_2 = S_3 = C$, on peut tracer comme *premier côté une droite quelconque par P_1*, et en déduire les trois autres côtés.

(VI) Au cas où le centre C fourni par (IV) n'est pas unique, on pourra se donner *un cinquième point P_5*, répéter la construction (I) avec $k = 4$, et les constructions (II) et (III) avec $k = 3$, pour déterminer le centre C à l'intersection du cercle C_3 avec le cercle $C_1 = C_2$. Si cependant C_3 se trouvait encore confondu avec $C_1 = C_2$, on pourrait se donner *un sixième point P_6* et continuer de même. Après avoir fixé le centre C comme ci-dessus, la construction du polygone cherché se fera toujours par les méthodes (V) ou (V′), en remplaçant l'indice 3 qui figure en (V′) par l'indice du *premier point P_k non situé au sommet correspondant du polygone Π_0*.

On obtiendra de cette façon un polygone unique et bien déterminé, *sauf au cas où tous les points P_k donnés, ou choisis ultérieurement, se trouvent situés aux sommets successifs d'un même polygone régulier convexe Π_0 à n côtés, parcouru autant de fois qu'on le voudra dans le sens positif*. La conclusion à laquelle on parvient dans ce cas est du reste évidente *a priori*, c'est que tout polygone répondant au problème se déduit du polygone Π_0 en faisant pivoter chaque côté prolongé d'un même angle arbitraire autour de son premier sommet, la rotation se faisant toujours dans le même sens. Tous les polygones obtenus ont le même centre C, celui de Π_0.

3. En établissant la validité de la construction indiquée au n° 2, on aura du même coup démontré complètement l'énoncé du n° 1. Il est clair, en effet, que le cas d'exception auquel s'applique la construction (VI) a lieu seulement si le point P_4 occupe une position déterminée, sans ambiguïté possible, par les points P_1, P_2, P_3 supposés donnés. Cette position *singulière d'indice n* se trouve en remontant du point S_3 à la base $P_3 P_4$ du triangle isocèle d'angle $2\,\pi/n$ au sommet S_3; le point S_3 lui-même aura été déduit de S_2 par une rotation positive d'angle $4\,\pi/n$ autour du centre $A_1 = A_2$.

Démonstration. Nous utilisons pour abréger la notation complexe. Soit z_k le point donné P_k, et c le centre C supposé trouvé. Il faut et suffit qu'une rotation de $2\,\pi\,(k-1)/n$ radians dans le sens négatif autour de c ramène le point z_k sur le premier côté tracé par z_1; c'est-à-dire que *les points*

$$w_k = (z_k - c)\, e^{-2\pi i (k-1)/n} \tag{1}$$

soient alignés en ligne droite, laquelle ligne se confond avec le premier côté. Or

$$w_{k+1} - w_k = [z_{k+1} - z_k e^{2\pi i/n} + c\,(e^{2\pi i/n} - 1)]\, e^{-2\pi i k/n}, \tag{2}$$

d'où, en posant

$$\zeta_k = \frac{z_{k+1} - z_k e^{2\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}}, \tag{3}$$

la relation équivalente

$$w_{k+1} - w_k = (\zeta_k - c)\,(1 - e^{2\pi i/n})\, e^{-2\pi i k/n}. \tag{4}$$

Les points S_k définis par (3) ne sont autres que les points S_k de la construction (I), puisqu'on a

$$z_{k+1} - \zeta_k = (z_k - \zeta_k)\, e^{2\pi i/n}. \tag{5}$$

On demande que les quantités

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{w_k - w_{k-1}} = \frac{\zeta_k - c}{\zeta_{k-1} - c}\, e^{-2\pi i/n} \tag{6}$$

soient réelles (positives ou négatives), c'est-à-dire que

$$\operatorname{arc}(\zeta_k - c) - \operatorname{arc}(\zeta_{k-1} - c) = \frac{2\pi}{n} \text{ ou } \frac{2\pi}{n} - \pi. \tag{7}$$

Or, d'après les constructions (II) à (V), le segment $S_k\, S_{k+1}$ est vu sous un angle $4\pi/n$ (dans le sens positif) à partir du centre A_k d'un cercle comprenant sur sa circonférence le point C; le segment $S_k\, S_{k+1}$ est donc vu, à partir du point C, sous un angle soit de $2\pi/n$ dans le sens positif, soit de $\pi - 2\pi/n$ dans le sens négatif, ce qui équivaut à (7). On a donc établi que les points w_k sont alignés. Pour achever, il faut vérifier suivant (V) que cette droite fait avec la demi-droite $C\,S_1$ un angle $\pi/2 - \pi/n$ radians dans le sens positif. Cela résulte immédiatement de (4), qui donne

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= (\zeta_1 - c)\,(e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n})\, e^{-\pi i/n} \\ &= (\zeta_1 - c)\, 2i \sin\frac{\pi}{n}\, e^{-\pi i/n}. \end{aligned}$$

La construction est donc établie. R. C. Young, London.

Aufgabe 11. Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R ($r < R$). Auf dem kleineren Kreis liege ein fester Punkt P; durch ihn zieht man die beliebige Sehne PA (A ist demnach ein veränderlicher Punkt des kleineren Kreises). Durch P gehe normal zu PA die Sehne BC des größeren Kreises. Es ist zu beweisen, daß

1. die Summe $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ einen konstanten Wert hat;
2. die Summe $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ ebenfalls konstant ist.

Auch ist zu bestimmen der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Strecken 3) BC 4) AB 5) AC. E. Voellmy.

Lösung: Man ziehe durch A die Parallele zu BC. Ihre Schnittpunkte mit dem größern Kreis seien B' und C', Dann sind die Vierecke $APBB'$ und $APCC'$ Rechtecke. Daraus folgen:

1. $(\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{AP}^2 = (\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{BB'}^2 = 4R^2$, also:
   $\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 = 4R^2 - 2\cdot\overline{BP}\cdot\overline{PC}$.
   $\overline{BP}\cdot\overline{PC}$ ist aber nach dem Sehnensatz konstant und zwar gleich $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$; daher gilt:
   $\overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 = \text{konst.} = 2(R^2 + r^2)$.

2. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2 + (\overline{BP} + \overline{PC})^2$
$= 2[(\overline{BP} + \overline{PC})^2 + \overline{AP}^2] - 2 \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PC}$,
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 8R^2 - 2(R^2 - r^2) = 6 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2 =$ konst.

3. Sei D der zweite Schnittpunkt der Sehne BC mit dem kleinern Kreis und M der Mittelpunkt der beiden Kreise. Dann ist der geometrische Ort des Mittelpunktes von $\overline{BC}$ zugleich geometrischer Ort des Mittelpunktes von $\overline{PD}$ und dieser ist das ähnliche Bild des kleinen Kreises bezüglich P im Maßstab 1:2, d. h. der Kreis über $\overline{PM}$ als Durchmesser.
Da die Vierecke $APBB'$ und $APCC'$ Rechtecke sind, fallen die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit denen der Strecken $\overline{PB'}$ und $\overline{PC'}$ zusammen. Ihr geometrischer Ort — die beiden Oerter fallen aus Symmetriegründen in eine Kurve zusammen — ist also das ähnliche Bild des größern Kreises bezüglich P im Maßstab 1:2. W. PROKOP, Winterthur.

Weitere Lösungen sandten: L. KIEFFER (Luxembourg), B. SCHENKER (Bern), E. BEERENWINKEL (St. Gallen), K. RIEDER (Riehen).

Aufgabe 14. P sei ein Punkt einer CASSINIschen Kurve mit den Polen F_1 und F_2. Man zeige, daß die Kurvennormale in P die Symediane des Dreiecks $F_1 F_2 P$ ist (d.h. symmetrisch zur Mediane m_P bezüglich der Winkelhalbierenden w_P). W. LÜSSY.

Lösung: Sind P und P' zwei Kurvenpunkte, so liegen wegen $\frac{r_1}{r_1'} = \frac{r_2'}{r_2}$ die Punkte F_1, F_2 auf zwei gleichen Apollonischen Kreisen bezüglich der Strecke $\overline{PP'}$. Der Grenzübergang $P' \to P$ zeigt, daß die Normalen n_i in F_i zu PF_i auf der Kurventangente t gleiche Abschnitte $\overline{PT_1} = \overline{PT_2}$ bestimmen. Die Tangente t ist also parallel zur Diagonalen QR des Parallelogramms $PQDR$, das durch die Ecke P und die Geraden n_i bestimmt ist. Die andere Diagonale PD (Mittelpunkt M) ist Umkreisdurchmesser für das Sehnenviereck $F_1 D F_2 P$. Aus den gegensinnig ähnlichen Dreiecken $F_1 F_2 P$ und DPR erhält man durch Spiegelung des erstern an der Winkelhalbierenden w_P die gleichsinnig ähnlichen Dreiecke $F_1' F_2' P$ und DPR, deren homologe Seiten aufeinander senkrecht stehen. Es entsprechen sich nun die Medianen m_P' und MR; folglich ist m_P' (das Spiegelbild zu m_P bezüglich w_P) identisch mit der Kurvennormalen.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Der Verfasser teilt mit, daß ihm nachträglich die folgende Literaturstelle bekannt wurde, wo im wesentlichen dasselbe Verfahren (J. STEINER) erwähnt wird: G. LORIA, Ebene Kurven, deutsche Ausgabe, Leipzig 1902, S. 197f. Weitere Lösung (analytisch) von L. KIEFFER (Luxembourg).

Aufgabe 17. Deux droites gauches a et b sont tangentes à une sphère. Trouver le lieu géométrique des points de contact de toutes les tangentes à la sphère qui coupent a et b. L. KOLLROS.

Lösung: Die Tangenten a und b können als Erzeugende erster Art eines einschaligen Rotationshyperboloids aufgefaßt werden, das von der Kugel berührt wird. Sämtliche Erzeugende zweiter Art sind Tangenten an die Kugel, die a und b schneiden; der Ort ihrer Berührungspunkte ist der dem Hyperboloid und der Kugel gemeinsame Kreis, der durch die Berührungspunkte der gegebenen Geraden gehen und diese unter gleichen Winkeln schneiden muß. Es gibt zwei solcher Kreise, die miteinander rechte Winkel bilden.

Demnach gilt: Der gesuchte geometrische Ort ist das Paar der Kugelkreise, die a und b unter gleichen Winkeln schneiden. W. LÜSSY.

Herr KOLLROS schreibt dazu: «L'une des 2 solutions élégantes du problème 17 que j'avais envisagées est celle que M. LÜSSY vous communique; l'autre est la suivante: Si A et B sont les points de contact de la sphère avec a et b, x une droite variable coupant a et b et touchant la sphère en X, les plans (ax) et (bx) coupent la sphère suivant 2 cercles α et β tangents en X. La projection stéréographique de centre A transforme les cercles $\alpha\ldots$ en droites $\alpha'\ldots$ parallèles à a et tangentes en $X'\ldots$ aux cercles $\beta'\ldots$ qui ont en B' une tangente donnée b'. Le lieu des points de contact X' se compose de 2 droites rectangulaires passant par B' dont les projections sur la sphère sont les 2 cercles orthogonaux cherchés.»

26. Beweise für die Fläche eines Dreiecks die Formel

$$F = \frac{(p_a \sin\alpha + p_b \sin\beta + p_c \sin\gamma)^2}{2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}.$$

α, β, γ sind die Gegenwinkel der Seiten a, b, c und p_a, p_b, p_c die mit Vorzeichen versehenen Abstände der Seiten von einem beliebigen Punkt der Ebene. E. TROST.

Literaturüberschau

Ein merkwürdiger Kauz unter den Mathematikern des 18. Jahrhunderts

Der König: «Welche Wissenschaft haben Sie besonders studiert?»
Der Gelehrte: «Alle, Sire!»
Der König: «Sie sind also auch ein guter Mathematiker?»
Der Gelehrte: «Jawohl, Sire!»
Der König: «Wer hat Sie in Mathematik unterrichtet?»
Der Gelehrte: «Ich selbst.»
Der König: «Dann sind Sie also ein zweiter Pascal?»
Der Gelehrte: «Jawohl, Sire.»

So berichtet THIÉBAULT über das erste Zusammentreffen des Mathematikers JOHANN HEINRICH LAMBERT mit dem Hohenzollern Friedrich II. in Potsdam, März 1764. «Le plus grand imbécile que j'ai jamais vu!» so faßte der Fürst seinen ersten Eindruck zusammen, und die beabsichtigte Anstellung an der Berliner Akademie schien zu entschwinden. Ganz anders dachte Lambert über seine Aussichten: «Wenn der König mich nicht behält, so wäre es ein Flecken in seiner Geschichte.» Er behielt recht.

Man hat diese Anekdote hauptsächlich als einen Beleg für LAMBERTS eitles Selbstbewußtsein weitergegeben. Es steckt aber mehr Positives darin, vor allem ein prachtvolles Stück von jenem «Männerstolz vor Königsthronen», den der Schweizer mehr besang als ausübte, ein Gefühl für den Wert der Wissenschaft als einer geistigen Macht — gegenüber dem Vertreter des aufgeklärten Despotismus. Das hat auch seinen Eindruck nicht verfehlt: der Kauz wurde vom König immer höher geschätzt und ausgezeichnet, während der doch größere Euler ungeachtet seiner Gefügigkeit es in der königlichen Gunst nicht ganz so weit brachte.

Das *Werk* LAMBERTS wird aus dem *Lebenslauf* verständlicher. JOHANN HEINRICH LAMBERT wurde am 26. April 1728 in Mülhausen als Sohn eines kleinen Stückschneiders geboren und inmitten einer zahlreichen Familie für den Beruf des Vaters bestimmt. Bis zu seinem 12. Jahre besuchte er die öffentlichen Schulen. Den Lehrern fiel er durch seine Fähigkeiten auf, und sie hätten ihm, vereint mit dem umgestimmten Vater,