Das Hornersche Schema für komplexe Funktionswerte

Autor(en): **Buchner, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **3 (1948)**

Heft 1

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13569

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

mit (3) $P(t)$ als Stützfunktion einer Kurve E^* auf und erhalten als Koordinaten des allgemeinen Punktes von E^*

$$x = P(t)\cos t - P'(t)\sin t = x_S,$$
$$y = P(t)\sin t + P'(t)\cos t = y_S,$$

das heißt E^* ist mit E' identisch. Die Normale in S hat somit den Richtungswinkel $\varphi + \beta/2$, w. z. b. w.

Ähnlich wie oben findet man mit (2)

$$P''\left(\varphi + \frac{\beta}{2}\right)\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) = \frac{p'(\varphi+\beta) - p'(\varphi)}{2\sin\beta/2}\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \frac{\beta'}{2}\cdot\frac{d(\varphi+\beta) - d(\varphi)}{2\sin\beta/2}.$$

Hieraus ergibt sich mit (2) und (4) ein stetiger Krümmungsradius für E^*:

$$\varrho^* = P(t) + P''(t) = \frac{1}{\sin\beta/2}\cdot\frac{2\,d(\varphi)\,d(\varphi+\beta)}{d(\varphi) + d(\varphi+\beta)} > 0.$$

E^* ist also eine Eilinie. Schreibt man diesen Ausdruck in der Form

$$\frac{1}{\varrho^*} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{d(\varphi)} + \frac{1}{d(\varphi+\beta)}\right\}\cos\frac{\alpha}{2},$$

wo $\alpha = 180^0 - \beta$ der Winkel zwischen den Berührungsstrecken $d(\varphi)$ und $d(\varphi+\beta)$ ist, so erhält man folgende geometrische Deutung: Die in den Berührungspunkten mit E auf $d(\varphi)$ und $d(\varphi+\beta)$ errichteten Lote schneiden auf der Normalen in S zwei Stücke SA und SB heraus, deren harmonisches Mittel der Krümmungsradius ϱ^* ist, das heißt, der Krümmungsmittelpunkt ist der vierte harmonische Punkt zu S und A, B. Für die Ellipse $(d(\varphi) + d(\varphi+\beta) = r_1 + r_2 = 2a)$ ist dieser Satz sowie auch die Formel für ϱ^* längst bekannt[1]). Macht man von dieser Tatsache Gebrauch, so kann man natürlich die oben durch Rechnung gefundene Verallgemeinerung auch «elementar» ableiten. Man lege zu diesem Zweck den Faden um ein konvexes Polygon. Vom Stift wird offenbar eine aus Ellipsenbögen zusammengesetzte Kurve beschrieben. Die Tangente ist stetig in den Übergangsstellen, die Krümmung hingegen nicht. Diese Unstetigkeit verschwindet, wenn man das Polygon in eine glatte Kurve ohne geradlinige Stücke übergehen läßt.

ERNST TROST, Zürich.

Das Hornersche Schema für komplexe Funktionswerte

Zur Berechnung der Funktionswerte ganzer rationaler Funktionen mit reellen Koeffizienten wird wohl stets das ungemein praktische Hornersche Schema[2]) verwendet. Weniger bekannt scheint zu sein, daß L. COLLATZ[3]) gezeigt hat, daß sich dieses Schema für die Berechnung der Funktionswerte solcher Funktionen an einer komplexen Stelle $x_0 = u + vi$ abändern läßt. Es sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n; \qquad (a_k \text{ reell})$$

---

[1]) Vgl. DINGELDEY, l. c., S. 73.
[2]) W. G. HORNER, Transaction, London 1819.
[3]) Das Hornersche Schema für komplexe Wurzeln. Z. angew. Math. Mech., 20, Nr. 4 (1940).

Um $f(u+vi)$ zu berechnen, bestimmen wir zunächst

$$\begin{aligned} x_0^2 &= u^2 + 2uvi - v^2 = 2u(u+vi) - (u^2+v^2) \\ &= 2u x_0 - (u^2+v^2) = p x_0 + q. \end{aligned}$$

Jetzt dividieren wir das Polynom $f(x)$ durch $x^2 - px - q$. Es ist

$$\begin{array}{l}
(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n) : (x^2 - px - q) \\
\underline{a_0 x^n - p a_0 x^{n-1} - q a_0 x^{n-2}} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = a_0 x^{n-2} \\
\underbrace{(a_1 + p a_0)}_{a_1'} x^{n-1} + (a_2 + q a_0) x^{n-2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_1' x^{n-3} \\
\underline{a_1' x^{n-1} - p a_1' x^{n-2} - q a_1' x^{n-3}} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_2' x^{n-4} \\
\underbrace{(a_2 + p a_1' + q a_0)}_{a_2'} x^{n-2} + (a_3 + q a_1') x^{n-3} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_3' x^{n-5} \\
\underline{a_2' x^{n-2} - p a_2' x^{n-3} - q a_2' x^{n-4}} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\underbrace{(a_3 + p a_2' + q a_1')}_{a_3'} x^{n-3} + (a_4 + q a_2') x^{n-4} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{n-2}'. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\underbrace{(a_{n-2} + p a_{n-3}' + q a_{n-4}')}_{a_{n-2}'} x^2 + (a_{n-1} + q a_{n-3}') x \\
\underline{a_{n-2}' x^2 - p a_{n-2}' x - q a_{n-2}'} \\
\underbrace{(a_{n-1} + p a_{n-2}' + q a_{n-3}')}_{a_{n-1}'} x + \underbrace{(a_n + q a_{n-2}')}_{a_n'}
\end{array}$$

Hieraus entnimmt man für die Koeffizienten des Quotienten

$$f_2(x) = a_0' x^{n-2} + a_1' x^{n-3} + a_2' x^{n-4} + \cdots + a_{n-3}' x + a_{n-2}'$$

das folgende Bildungsgesetz

$$a_0' = a_0, \quad a_1' = a_1 + p a_0, \quad a_k' = a_k + p a_{k-1}' + q a_{k-2}' \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$
$$a_n' = a_n + q a_{n-2}'.$$

Somit gilt

$$f(x) = (x^2 - px - q) f_2(x) + a_{n-1}' x + a_n',$$

und daraus folgt für $x = x_0$ der gesuchte Funktionswert

$$f(x_0) = a_{n-1}' x_0 + a_n' = (a_{n-1}' u + a_n') + a_{n-1}' v i. \tag{1}$$

Das Schema von COLLATZ hat daher die einfache Form

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
p & & p a_0 & p a_1' & p a_2' & \ldots & p a_{n-3}' & p a_{n-2}' & \\
q & & & q a_0 & q a_1' & \ldots & q a_{n-4}' & q a_{n-3}' & q a_{n-2}' \\
\hline
 & a_0 = a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & \ldots & a_{n-2}' & a_{n-1}' & a_n'
\end{array}$$

Zur Berechnung von $f(x_0)$ sind nach (1) nur die Koeffizienten a'_{n-1} und a'_n notwendig.

Beispiel. Es sollen die komplexen Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^4 - 4\,x^3 + 5{,}94\,x^2 - 4\,x + 1 = 0 \tag{2}$$

berechnet werden. Diese Gleichung hat nur wenig verschiedene Koeffizienten von jenen der Gleichung

$$g(x) = x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 4\,x + 1 = (x-1)^4 = 0$$

mit der vierfachen Wurzel $x = 1$. In dieser neuen Gleichung ist nur ein Koeffizient um 1% geändert gegenüber der gegebenen Gleichung, daher ist zu erwarten, daß die Wurzeln der Gleichungen nur wenig voneinander verschieden sein werden.

Wir setzen als ersten Näherungswert für eine komplexe Wurzel der Gleichung (2)

$$x_0 = 0{,}9 + 0{,}5\,i\,.$$

Dann ist

$$x_0^2 = 1{,}8\,x_0 - (0{,}81 + 0{,}25) = 1{,}8\,x_0 - 1{,}06 = p\,x + q\,.$$

Wir berechnen den Funktionswert $f(0{,}9 + 0{,}5i)$ nach dem Schema von COLLATZ:

	1	− 4	5,94	− 4	1
1,8		1,8	− 3,96	1,656	—
− 1,06		—	− 1,06	2,332	− 0,9752
	1	− 2,2	0,92	− 0,012	0,0248

Daher wird

$$f(x_0) = -\,0{,}012\,(0{,}9 + 0{,}5\,i) + 0{,}0248 = \underline{0{,}014 - 0{,}006\,i}\,.$$

Wir verbessern den Wurzelwert x_0 nach dem Newtonschen Verfahren, das auch im Bereich der komplexen Zahlen gültig bleibt. Danach ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ein besserer Näherungswert. $f'(x_0)$ wird wiederum nach dem Schema von COLLATZ berechnet:

	4	− 12	11,88	− 4
1,8		7,2	− 8,64	
− 1,06			− 4,24	5,088
	4	− 4,8	− 1	1,088

$$f'(x_0) = -1 \cdot (0{,}9 + 0{,}5\,i) + 1{,}088 = \underline{0{,}188 - 0{,}5\,i}\,.$$

Der verbesserte Wurzelwert ergibt sich zu

$$x_1 = 0{,}9 + 0{,}5\,i - \frac{0{,}014 - 0{,}006\,i}{0{,}188 - 0{,}5\,i} \approx \underline{0{,}880 + 0{,}479\,i}\,.$$

Wir wiederholen das Verfahren mit dem einfachern Näherungswert $x_1 = 0{,}88 + 0{,}48\,i$,

dann wird $x_1^2 = 1{,}76\,x_1 - 1{,}0048$. Bei der Berechnung beschränken wir uns auf 5 Dezimalen.

	1	-4	5,94	-4	1
1,76		1,76	$-3{,}9424$	1,74733	
$-1{,}0048$			$-1{,}0048$	2,25075	$-0{,}99757$
	1	$-2{,}24$	0,9928	$-0{,}00192$	0,00243

$$f(x_1) \approx -0{,}00192\,(0{,}88 + 0{,}48\,i) + 0{,}00243 \approx \underline{0{,}00074 - 0{,}00092\,i}.$$

Für die Ableitung ergibt sich

	4	-12	11,88	-4
1,76		7,04	$-8{,}7296$	
$-1{,}0048$			$-4{,}0192$	4,98381
	4	$-4{,}96$	$-0{,}8688$	0,98381

$$f'(x_1) \approx -0{,}8688\,(0{,}88 + 0{,}48\,i) + 0{,}98381 \approx \underline{0{,}21927 - 0{,}41702\,i}.$$

Damit erhalten wir den Wurzelwert abermals verbessert:

$$x_2 \approx 0{,}88 + 0{,}48\,i - \frac{0{,}00074 - 0{,}00092\,i}{0{,}21927 - 0{,}41702\,i} \approx \underline{0{,}87754 + 0{,}47952\,i}.$$

Bemerkung. Wir haben dieses Beispiel gewählt, obwohl die Konvergenz des Newtonschen Verfahrens in der Nachbarschaft einer vierfachen Nullstelle der Vergleichsfunktion als ungünstig zu erwarten war, weil eine reziproke Gleichung auch direkt auf quadratische Gleichungen zurückführbar ist. Dividieren wir die gegebene Gleichung durch x^2 und setzen

$$u = x + \frac{1}{x},$$

dann wird

$$u^2 - 4\,u + 3{,}94 = 0 \quad \text{und} \quad u = 2 \pm \sqrt{0{,}06}.$$

Somit wird

$$x^2 - x\,(2 \pm \sqrt{0{,}06}) + 1 = 0,$$

und wir erhalten die vier Lösungen

$$x_1 = 0{,}61262, \quad x_2 = 1{,}63232, \quad x_{3,4} = 0{,}87753 \pm 0{,}47953\,i.$$

Wird in der Gleichung $(x-1)^4 = 0$ lediglich der Koeffizient 6 um 1% geändert, so ändern die Wurzeln ihren Wert bis zu 60%. Unseres Wissens hat zuerst A. OSTROWSKI auf diesen Zusammenhang hingewiesen.

P. BUCHNER, Basel.