Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

tors und des zugehörigen Bogens b. Die Differenz aus b und der entsprechenden Sehne $2s$ liegt in den Grenzen:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{ps}{r}+\frac{4}{15}\cdot\frac{p^2 s}{r^2}<b-2s<\frac{2}{3}\cdot\frac{ps}{r}+\frac{4}{15}\cdot\frac{p^2 s}{r^2}+\frac{p^3 s(4r-p)}{10r^4}. \tag{16}$$

Diese Abschätzung kann für die Berechnung des Kreisumfanges verwendet werden.

G. GRIMM, Herrliberg-Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Ein topologischer Satz über endliche geschlossene Kurven in der Ebene*

1. Eine Kurve wird endlich genannt, wenn sie eine endliche Bogenlänge besitzt. Wir nehmen im folgenden an, daß die ebenen Kurven C und K endlich, geschlossen und einzügig sind, eine endliche Anzahl ν von Schnittpunkten haben und daß diese Schnittpunkte verschieden sind. Es wird noch angenommen, daß K eine Jordansche Kurve (ohne Doppelpunkt) sei und daß C eine endliche Anzahl von Doppelpunkten besitze. Dann ist $\nu = 2n$ eine gerade Zahl.

Bezeichnen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ die Schnittpunkte der Kurven C und K und auch ihre Aufeinanderfolge auf der Kurve C bei einer Beschreibung von C, so ist die Aufeinanderfolge dieser $2n$ Punkte auf K eine Permutation P der $2n$ Elemente A_h $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$. Bezeichnen A_h^* $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$ $2n$ Punkte auf einem Kreis K^*, deren Aufeinanderfolge bei positivem Umlaufen von K^* mit derjenigen der Punkte A_h auf der Kurve K übereinstimmt, gibt es ferner im Kreise K^* unter den n ungeraden bzw. geraden Sehnen

$$A_{2k-1}^* A_{2k}^* \quad \text{bzw.} \quad A_{2k}^* A_{2k+1}^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ A_{2n+1}^* \equiv A_1^*)$$

m_1 bzw. m_2 sich schneidende Sehnenpaare und liegt der Bogen $\widehat{A_1 A_2}$ von C innerhalb von K, so besitzt die Kurve C mindestens m_1 bzw. m_2 Doppelpunkte innerhalb bzw. außerhalb von K.

Zum Beweis dieses Satzes bezeichnen wir mit γ_k bzw. δ_k den Bogen von C zwischen den auf C aufeinanderfolgenden Punkten A_{2k-1}, A_{2k} bzw. A_{2k}, A_{2k+1}. Dann liegen die Bogen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ bzw. $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ innerhalb bzw. außerhalb der Kurve K.

Wir nehmen erstens an, daß sowohl die Punkte A_h und A_h^* als auch die Kurven K und K^* übereinstimmen. Schneiden die Sehnen $A_{2i-1}A_{2i}$ und $A_{2k-1}A_{2k}$ bzw. $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ einander, so trennen die Punktpaare $A_{2i-1}A_{2i}$ und $A_{2k-1}A_{2k}$ bzw. $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ auf K einander. Dann werden also die Endpunkte des Bogens γ_i bzw. δ_i von den Endpunkten des Bogens γ_k bzw. δ_k auf K getrennt.

Bezeichnet γ_{i0} einen Teilbogen von γ_i mit den Endpunkten A_{2i-1}, A_{2i}, der sich in keinem Punkte schneidet oder berührt, so wird die Kreisscheibe $K \equiv K^*$ von γ_{i0} in zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ geteilt. (γ_i kann mit γ_{i0} zusammenfallen.) Trennen die Endpunkte von γ_i die Endpunkte von γ_k, so gehört der eine Endpunkt von γ_k zu $\mathfrak{B}_1$, der andere aber zu $\mathfrak{B}_2$. Der Bogen γ_k muß also den Bogen γ_{i0} mindestens einmal schneiden. Die Schnittpunkte sind Doppelpunkte der Kurve C.

Die Inversion in bezug auf den Kreis $K \equiv K^*$ führt den Bogen δ_k von C in einen innerhalb von K liegenden Bogen δ_k' mit denselben Endpunkten über. Schneiden die Kreissehnen $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ einander, so trennen die Endpunkte der Bogen δ_i' und δ_k' auf K einander. Dann haben δ_i' und δ_k' innerhalb von K, und ihre inversen Bogen δ_i und δ_k außerhalb von K mindestens einen Schnittpunkt.

Damit ist der Satz für den Fall $A_h \equiv A_h^*$ $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$ bewiesen.

Es gibt offenbar eine topologische (d. h. eine eineindeutige und beiderseits stetige) Transformation T einer beide Kurven C und K enthaltenden Kreisscheibe K_0 auf sich selbst, wodurch die Jordan-Kurve K auf einen Kreis K' abgebildet wird. Führt diese Transformation die Kurve C in die Kurve C' über, so führt sie die Doppelpunkte von

C in die Doppelpunkte von C', die Schnittpunkte A_h der Kurven C und K in die Schnittpunkte der Kurven C' und K' über. Bei dieser Abbildung stimmt die Aufeinanderfolge der Punkte A_h auf C bzw. K mit der Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte A'_h auf C' bzw. K' überein. Daraus folgt der Satz allgemein.

2. Der Kreis K^* läßt sich im Satz offenbar durch jede konvexe Kurve, sogar durch ein konvexes Vieleck ersetzen.

Ein p-facher Punkt ist im Satz als ein Zusammenfallen von $p(p-1)/2$ Doppelpunkten zu rechnen.

Es wurde angenommen, daß die Schnittpunkte der Kurven C und K einfach sind. Die Gültigkeit des Satzes bleibt auch dann bestehen, wenn C in einem Punkte A_h von K berührt wird. Dann ist $A_h \equiv A_{h+1}$ und die Sehne $A_h A_{h+1}$ und damit der entsprechende Bogen $\widehat{A_h A_{h+1}}$ von C schrumpfen in einen Punkt zusammen. Ist A_h ein Doppelpunkt, so ist $A_h \equiv A_k\,(h < k)$. Ist $k = h + 1$, so besteht die Sehne $A_h A_{h+1}$ aus einem Punkt, der Bogen $\widehat{A_h A_{h+1}}$ bildet aber eine geschlossene Kurve. Ist $k > h + 1$, so haben zwei Sehnen von K^* einen gemeinsamen Endpunkt, der also kein Schnittpunkt der Sehnen ist. Die Kreissehnen von der Länge Null kann man aus den Folgen der $2n$ Sehnen ohne weiteres weglassen.

Die Permutation P im Satz ist durch die Lage der Sehnen von K^* vollständig charakterisiert. Man kann die Eigenschaften der Permutation P leicht bestimmen, wenn die Kurve C keinen oder höchstens einen Doppelpunkt besitzt.

Zerfällt die Kurve durch ein Durchschneiden eines ihrer Doppelpunkte in zwei geschlossene Kurven C_1 und C_2 und ist C_2 eine Jordansche Kurve, so läßt sich der Satz auf die Schnittpunkte der Kurven C_1 und C_2 anwenden.

Die Gültigkeit des Satzes läßt sich auch für den Fall ausdehnen, daß die Kurve C nicht endlich ist, sondern p Asymptoten besitzt. Dann sind die unendlichen Punkte von C als ein p-facher Punkt von C zu betrachten. Dies folgt aus der Inversion der außerhalb des Kreises $K \equiv K^*$ liegenden Bogen der Kurve C.

GYULA V. SZ. NAGY, Szeged.

II. *Construction graphique de la tangente en un point d'une courbe*

PIRANI a indiqué le procédé suivant pour déterminer d'une façon approchée la tangente au point P d'une courbe (fig. 1):

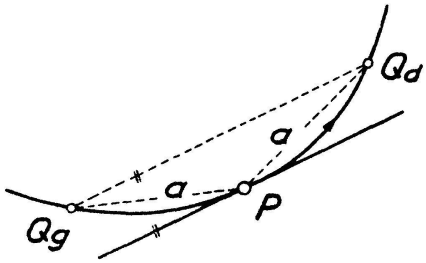

Fig. 1

Avec un rayon a, ni trop grand ni trop petit, on détermine sur la courbe à partir de P les deux points Q_g et Q_d; la tangente cherchée en P est alors à peu près parallèle à la corde $Q_g Q_d$.

Si P n'est pas voisin d'un point où la courbure est minimum ou maximum, ce procédé n'est pas très satisfaisant, et il est évidemment défaillant aux environs des points d'inflexion. A. WALTHER et TH. ZECH[1]) ont évalué l'erreur commise:

$$\delta = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{d\varkappa}{ds} + \cdots.$$

---

[1]) A. WALTHER et TH. ZECH, *Bemerkungen zur angenäherten Tangentenkonstruktion von Pirani*, Ber. Verh. Sächsischen Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. *85*, 45 (1933).

δ est l'angle entre la corde $Q_g Q_d$ et la tangente en P, $\varkappa$ la courbure locale (inverse du rayon de courbure) et s la longueur de l'arc de la courbe (comptée positivement dans le sens de la flèche). — L'erreur δ étant un infiniment petit de l'ordre de a^2, le procédé de PIRANI est correct du point de vue mathématique, mais l'œil s'aperçoit bien vite qu'il est insuffisant du point de vue graphique, ce qui rend désirable une amélioration de ce procédé.

Mais comme on ne connaît pas en général la variation numérique de la courbure $\varkappa(s)$ d'une courbe qui n'est pas donnée immédiatement par son équation, il faut essayer d'utiliser la courbe elle-même pour trouver une construction plus exacte. Si l'on regarde attentivement la fig. 2, on peut penser à se servir de la *différence* Δh des deux flèches h_g et h_d pour améliorer la direction de la tangente trouvée par PIRANI.

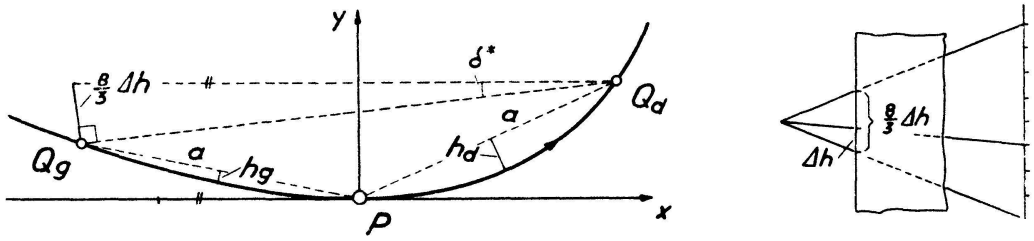

Fig. 2. $\Delta h = h_d - h_g$.

Pour développer cette idée par le calcul, on prendra un système de coordonnées x, y ayant pour origine le point P, de telle manière que l'axe Px positif coïncide avec la tangente (orientée) en ce point. — Soit

$$y = b\,x^2 + c\,x^3 + \cdots, \qquad (b,\ c \text{ quelconques})$$

le développement de MAC LAURIN de la courbe donnée. Pour l'évaluation projetée, il suffit de considérer les deux termes écrits. — Le bon sens aidant, on choisit toujours la corde a de telle façon que sa longueur ne soit pas trop grande par rapport au rayon minimum de courbure de l'arc $Q_g Q_d$. Si le carré de ce rapport est faible devant l'unité, les abscisses de Q_g et Q_d sont approximativement $-a$ et $+a$, et leurs ordonnées $b\,a^2 - c\,a^3$ et $b\,a^2 + c\,a^3$. — Les flèches h_g et h_d peuvent alors être calculées assez exactement comme les différences des ordonnées entre la corde et la courbe aux points d'abscisses $-a/2$ et $+a/2$; avec les approximations antérieures, on obtient:

$$h_g = \frac{1}{2}(b\,a^2 - c\,a^3) - \left(b\,\frac{a^2}{4} - c\,\frac{a^3}{8}\right)$$

et

$$h_d = \frac{1}{2}(b\,a^2 + c\,a^3) - \left(b\,\frac{a^2}{4} + c\,\frac{a^3}{8}\right),$$

d'où

$$\Delta h = h_d - h_g = c\,a^3 - \frac{1}{4}\,c\,a^3 = \frac{3}{4}\,c\,a^3.$$

L'angle δ^* dont il faut faire tourner la corde $Q_g Q_d$ pour la rendre parallèle à l'axe Px (tangente à la courbe en P), résulte de la différence des ordonnées de Q_g et de Q_d:

$$\delta^* = -\frac{1}{2\,a}[(b\,a^2 + c\,a^3) - (b\,a^2 - c\,a^3)] = -\frac{2\,c\,a^3}{2\,a}$$

ou, en faisant intervenir Δh,

$$\delta^* = -\frac{(8/3)\,\Delta h}{2\,a}.$$

Pour obtenir la tangente à partir de la corde $Q_g Q_d$, il suffit de mesurer le segment $\Delta h = h_d - h_g$ (bande de papier!), puis de le multiplier par 8/3 (à l'œil, ou comme indiqué sur la fig. 2 à droite) et de le porter à peu près perpendiculairement à la base $Q_g Q_d \cong 2\,a$ à l'extrémité convenable. — Comme il ressort de la démonstration, cette

construction est aussi valable sans aucune réserve en un point d'inflexion; les flèches h_g et h_d ont alors des signes différents, et pour avoir Δh, il faut les *ajouter* en valeur absolue.

Pour terminer, on peut encore comparer le δ^* avec l'erreur calculée

$$\delta = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{d\varkappa}{ds}$$

mentionnée au début. Or, d'après l'équation $y = b x^2 + c x^3$ on peut maintenant calculer

$$\frac{d\varkappa}{ds} = \frac{d\varkappa}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \quad \text{par} \quad \varkappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};$$

au point P, on obtient simplement $(d\varkappa/ds)_P = 6c$, ce qui donne

$$\delta = -\frac{a^2}{6}\, 6\, c = -\frac{2\, c\, a^3}{2\, a} = \delta^*.$$

On remarque que notre correction δ^* est égale à l'erreur commise δ de la construction de PIRANI.

ERICH SPONDER, Paris.

III. *Une famille de droites concourantes*

1° — Appelons point moyen ou centre d'un certain nombre de points le point dont les coordonnées sont les moyennes arithmétiques des coordonnées respectives des points donnés.

Considérons n points arbitrairement choisis et leur centre O; séparons-les en deux groupes contenant p et q points; soit $p \leqq q$; soient P et Q leurs centres respectifs. Désignons par $\Sigma_p(x)$ la somme des abscisses du premier groupe, etc.

Les identités

$$\frac{p\,\frac{1}{p}\,\Sigma_p(x) + q\,\frac{1}{q}\,\Sigma_q(x)}{p+q} = \frac{1}{n}\,\Sigma_n(x), \qquad \frac{p\,\frac{1}{p}\,\Sigma_p(y) + q\,\frac{1}{q}\,\Sigma_q(y)}{p+q} = \frac{1}{n}\,\Sigma_n(y), \ldots$$

montrent que:

a) le point O se trouve sur PQ, *b*) $\overline{QO} : \overline{OP} = p : q$.

2° — Pour une paire fixe des valeurs p et q, le nombre $N(p, q)$ des différentes droites PQ est égal au nombre des combinaisons de n points pris respectivement p à p ou q à q. Donc,

$$N(p, q) = C_n^p = C_n^q = \frac{1}{2}\,(C_n^p + C_n^q);$$

le nombre total $\Sigma N(p, q)$ des différentes droites PQ pour toutes les valeurs possibles des p et des q est égal à

$$\Sigma N(p, q) = \frac{1}{2}\,(C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1}) = \frac{1}{2}\,[2^n - (C_n^0 + C_n^n)] = 2^{n-1} - 1.$$

3° — A l'aide de ces simples remarques, on peut trouver dans tout polygone ou polyèdre une famille spéciale de droites concourantes et montrer certaines de leurs propriétés avec une simplicité remarquable. Voici quelques exemples:

Dans un hexagone $ABCDEF$, les droites qui joignent:
les sommets A, B, ... avec les centres des pentagones $BCDEF$, $CDEFA$, ...,
les points milieux des côtés AB, BC, ... avec les centres des quadrilatères $CDEF$, $DEFA$, ...,
les points milieux des diagonales AC, BD, avec les centres des quadrilatères $BDEF$, $CEFA$,

les points milieux des diagonales AD, BE, avec les centres des quadrilatères $BCEF$, $CDFA$,
les centres des triangles ABC, BCD, avec les centres des triangles DEF, EFA,
les centres des triangles ACD, ADE, BDE, avec les centres des triangles BEF, BCF, ACF, ..., passent par le milieu du segment limité par les centres des triangles ACE et BDF que forment les sommets pris alternativement. —

On voit par la formule sous 2° que le nombre des droites PQ augmente très vite avec le nombre des sommets. Ainsi, pour l'icosagone la famille est constituée par 524287 droites.

Dans le cas le plus simple, $n = 3$, la proportion b) de 1° nous montre la propriété bien connue des trois médianes d'un triangle.

4° — Considérons un groupe orthocentrique A, B, C, H et son centre E. Soient G, G', G'', G''' les centres de gravité des triangles ABC, BCH, CAH, ABH, M', M'', M''' les milieux de BC, CA, AB et E', E'', E''' les milieux de AH, BH, CH.

On voit que les droites

$$AG',\ BG'',\ CG''',\ HG, \qquad (a) \qquad (p = 1,\ q = 3)$$

$$E'M',\ E''M'',\ E'''M''' \qquad (b) \qquad (p = 2,\ q = 2)$$

passent par E. Donc, le centre d'un groupe orthocentrique est le centre du cercle des neuf points de ce groupe; en ce cas, les diamètres remarquables de ce cercle (b) et les droites d'EULER (a) constituent la famille de droites. On voit que $\overline{GE}:\overline{EH} = p:q = 1:3$.

La propriété de convergence des droites telles que (b) pour quatre points quelconques donne une démonstration générale d'un théorème qu'on peut présenter sous des formes différentes selon les cas (quadrilatère, tétraèdre, triangle avec trois céviennes concourantes).

5° — La considération d'un cinquième point M arbitraire et des centres de gravité K', K'', K''' des triangles MBC, MCA, MAB conduit aisément aux résultats suivants:

1. Les droites $E'K'$, $E''K''$, $E'''K'''$ et ME concourent en un point O.
2. $\overline{K'O}:\overline{OE'} = \overline{K''O}:\overline{OE''} = \overline{K'''O}:\overline{OE'''} = 2:3$.
3. $\overline{MO}:\overline{OE} = 1:4$.

D'où le théorème: Les droites qui joignent les points d'EULER de la base d'un tétraèdre avec les centres de gravité des faces opposées concourent sur la droite passant par le centre du cercle des neuf points de cette base et par le sommet opposé du tétraèdre.

G. N. VLAHAVAS, Fareham-Hants.

Aufgaben

Lösung der **Aufgabe 7** (diese Zeitschrift *1*, 21 [1946]). Man setze die molaren Konzentrationen entsprechend der Dissoziationsgleichung $2\ SO_3 \rightarrow 2\ SO_2 + O_2$ wie folgt an: SO_3: $c_v = 2\,n$ Mole/cm³ vor der Reaktion. Dann folgen die Konzentrationen nach der Reaktion zu: $[SO_3] = 2\,n\,(1-\alpha)$, $[SO_2] = 2\,n\,\alpha$, $[O_2] = n\,\alpha$. Totale Molzahl/cm³: $n_t = n\,(2+\alpha)$. Damit ergeben sich die Partialdrucke zu $p_1 = 2\,n\,(1-\alpha)\,RT$, $p_2 = 2\,n\,\alpha\,RT$, $p_3 = n\,\alpha\,RT$ und $p_t = n\,(2+\alpha)\,RT$. Hieraus folgt der Bildungsgrad von SO_3 zu:

$$x = \frac{p_1}{p_i} = \frac{2\,(1-\alpha)}{2+\alpha}$$

und das Massenwirkungsgesetz liefert:

$$K'_p = \frac{p_1^2}{p_2^2\,p_3} = \frac{(1-\alpha)^2\,(2+\alpha)}{\alpha^3\,p_t}\,.$$

Drückt man α durch x aus, so folgt:

$$p_t = \frac{27\,x^2}{4\,K'_p\,(1-x)^3}\,.$$