Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 149. Die Ecken eines Würfels sind die Spitzen von acht dem Würfel einbeschriebenen Drehkegeln. Man berechne das Volumen des Körpers, der von den acht Kegeln begrenzt ist (vgl. Nr. 63). L. KIEFFER, Luxemburg.

Lösung: Der Schnitt zweier Kegel, deren Spitzen Ecken einer Kante sind, liegt in der Symmetrieebene dieser Kante und ist eine Parabel, da jeder dieser Kegel genau eine zu dieser Symmetrieebene parallele Erzeugende besitzt. Der zur Oberfläche des Körpers gehörige Teil des Mantels eines der acht Kegel ist von drei Parabelbögen begrenzt. Die Enden dieser Bögen sind Mittelpunkte von Würfelflächen. Stellt man den Würfel in einer Zweitafelprojektion so dar, dass eine Hauptdiagonale $A\bar{A}$ normal zur Grundrissebene und eine Würfelkante AB parallel zur Aufrissebene ist, dann erscheinen alle wesentlichen Grössen in einem der Risse in wahrer Grösse und sind leicht planimetrisch zu berechnen. Der Mantelteil M des Kegels mit der Spitze A wird im Grundriss durch drei kongruente Parabelbögen begrenzt, deren Sehnen gleich $s/\sqrt{2}$ sind. Den Pfeil dieser Bögen sieht man in beiden Rissen in wahrer Grösse. Er ist $s\sqrt{6}:24$ (ein Achtel des Grundrisses einer Kante). Der Grundriss M' des Mantelteiles M setzt sich aus drei Parabelschnitten und einem gleichseitigen Dreieck zusammen. Es ist daher

$$M' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{s}{24}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\left(\frac{s}{2}\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{5}{24}\, s^2 \sqrt{3}.$$

Da der Sinus des halben Öffnungswinkels eines Kegels (siehe Aufriss) gleich $1/\sqrt{3}$ ist, ist $M = 5\, s^2/8$ und die Oberfläche des Körpers $O = 5\, s^2$.

Wir machen nun Gebrauch von dem elementaren Satz: Berühren die Ebenen aller Flächenelemente der Oberfläche O eines Körpers eine Kugel mit dem Radius R, dann ist das Volumen $V = RO/3$. Da die acht Kegel die dem Würfel eingeschriebene Kugel mit dem Radius $s/2$ berühren, ist das gesuchte Volumen

$$\underline{V = \frac{5\, s^3}{6}}.$$

R. LAUFFER, Graz.

Eine weitere Lösung sandte A. SCHWARZ (Seuzach).

Aufgabe 151. Bei der Berechnung der Induktion eines kreisförmigen Leiters in einem Punkt im Innern des Kreises wird man auf

$$\int_0^\pi \frac{1 - \lambda \cos\alpha}{(1 + \lambda^2 - 2\,\lambda \cos\alpha)^{3/2}}\, d\alpha, \qquad (\lambda < 1)$$

geführt. Das Integral ist auszuwerten. W. LÜSSY, Winterthur.

Lösung: P sei ein beweglicher Punkt auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt M. A sei ein fester Punkt im Innern, $\overline{MA} = \lambda < 1$. Ferner sei

$$\sphericalangle PMA = \alpha, \quad \sphericalangle PAM = 180^\circ - \psi, \quad \sphericalangle APM = \varphi = \psi - \alpha, \quad PA = x,$$

so dass $x^2 = 1 + \lambda^2 - 2\,\lambda \cos\alpha$. Hieraus folgt

$$I = \int_0^\pi \frac{1 - \lambda \cos\alpha}{(1 + \lambda^2 - 2\,\lambda \cos\alpha)^{3/2}}\, d\alpha = \int_0^\pi \frac{1 - \lambda \cos\alpha}{x^3}\, d\alpha. \qquad (1)$$

Nach dem Sinussatz ist $\sin(\psi - \alpha) = \lambda \sin\psi$ und daraus

$$\cos(\psi - \alpha)\,(d\psi - d\alpha) = \lambda \cos\psi\, d\psi \quad \text{oder} \quad (\cos\varphi - \lambda \cos\psi)\, d\psi = \cos\varphi\, d\alpha.$$

Jetzt ergibt sich aus (1) wegen $1-\lambda\cos\alpha = x\cos\varphi$ und $\cos\varphi - \lambda\cos\psi = x$

$$\int_0^\pi \frac{(1-\lambda\cos\alpha)\,(\cos\varphi-\lambda\cos\psi)}{x^3\cos\varphi}\,d\psi = \int_0^\pi \frac{d\psi}{x}. \tag{2}$$

Der Kosinussatz gibt für x die quadratische Gleichung

$$1 = x^2 + \lambda^2 + 2\,x\,\lambda\cos\psi,$$

aus der wegen $x > 0$ folgt

$$x = \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi} - \lambda\cos\psi.$$

Damit schliessen wir aus (2)

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}-\lambda\cos\psi} = \frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^\pi \left(\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}+\lambda\cos\psi\right)d\psi$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}\int_0^\pi \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}\,d\psi = \frac{2}{1-\lambda^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\psi}\,d\psi = \frac{2}{1-\lambda^2}E(\lambda),$$

wo $E(\lambda)$ das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung ist.

F. GOLDNER, London.

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Gráz.

Aufgabe 152. *a*) Trouver tous les nombres premiers de la suite infinie

101, 10101, 1010101, 101010101, ...

b) Combien de nombres premiers contiennent les suites infinies

1001, 1001001, 1001001001, ...,

10001, 100010001, 1000100010001, ...

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Lösung: Das n-te Glied dieser Folgen hat die Form

$$a_n^{(\sigma)} = 1 + 10^\sigma + 10^{2\sigma} + \cdots + 10^{n\sigma} = \frac{10^{\sigma(n+1)}-1}{10^\sigma - 1}. \qquad (\sigma = 2, 3, 4) \tag{1}$$

Ist $\sigma = \lambda\mu$ eine beliebige ganzzahlige Zerlegung von σ, so lässt sich dieser Ausdruck wie folgt umformen

$$a_n^{(\sigma)} = \frac{\left\{10^{\lambda(n+1)}-1\right\}\left\{10^{\lambda(\mu-1)(n+1)}+10^{\lambda(\mu-2)(n+1)}+\cdots+1\right\}}{\left\{10^\lambda-1\right\}\left\{10^{\lambda(\mu-1)}+10^{\lambda(\mu-2)}+\cdots+1\right\}}$$

$$= \frac{\left\{10^{\lambda n}+10^{\lambda(n-1)}+\cdots+1\right\}\left\{10^{\lambda(\mu-1)(n+1)}+10^{\lambda(\mu-2)(n+1)}+\cdots+1\right\}}{\left\{10^{\lambda(\mu-1)}+10^{\lambda(\mu-2)}+\cdots+1\right\}} = \frac{\{B\}\{C\}}{\{A\}}.$$

Für $1 < \mu$ ist $A < C$, für $\mu < n+1$ ist $A < B$. Wenn aber sowohl $A < B$ als auch $A < C$ ist, zerfällt $a_n^{(\sigma)}$ in nichttriviale Faktoren. Das heisst:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ist } \sigma > 1 \text{ und ist } \mu = p \text{ die kleinste in } \sigma \text{ enthaltene Primzahl, so ist } a_n^{(\sigma)}\\ \text{für alle } n \geqq p \text{ zusammengesetzt.}\end{array}\right\} \tag{2}$$

Insbesondere kommen also für $\sigma = 2, 3, 4$ höchstens $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$, $a_2^{(3)}$ und $a_1^{(4)}$ als Primzahlen in Frage. Nun ist aber $a_1^{(3)} = 1001$ durch 11, $a_2^{(3)} = 1001001$ durch 3 teilbar und

für $a_1^{(4)}$ findet man die Zerlegung $10001 = 73 \cdot 137$. Somit bleibt $a_1^{(2)} = 101$ als einzige Primzahl.

Aus Satz (2) folgt ganz allgemein, dass jede Folge (1) für $\sigma > 1$ höchstens endlich viele Primzahlen enthält. So kommen als Primzahlen für $\sigma = 5$ nur die ersten 4 Glieder, für $\sigma = 6$ nur das erste Glied der Folge in Frage usw. Für $\sigma = 1$, das heisst für die Folge 11, 111, 1111, 11111, ... bleibt diese Frage offen. Man beweist wie oben, dass $a_n^{(1)}$ höchstens dann Primzahl ist, wenn $n + 1$ eine Primzahl ist. Tatsächlich ist das erste Glied $a_1^{(1)} = 11$ eine Primzahl, aber die nächsten in Frage kommenden Glieder sind zusammengesetzt:

$$a_2^{(1)} = 111 = 3 \cdot 37, \quad a_4^{(1)} = 11\,111 = 41 \cdot 271, \quad a_6^{(1)} = 1\,111\,111 = 239 \cdot 4649.$$

Ebenso unentschieden ist die Frage, welche Anfangsglieder $a_1^{(\sigma)}$, das heisst welche Glieder der Folge 11, 101, 1001, 10001, ... Primzahlen sind. Aus

$$a_1^{(\sigma)} = \frac{10^{2\sigma} - 1}{10^{\sigma} - 1} = 10^{\sigma} + 1$$

folgt sofort, dass σ keinen ungeraden Faktor enthalten darf, also $\sigma = 2^{\lambda}$ sein muss. $a_1^{(1)} = 11$ ist Primzahl, ebenso $a_1^{(2)} = 101$, aber $a_1^{(4)} = 10\,001 = 73 \cdot 137$ ist zusammengesetzt. Das Problem ist analog demjenigen der Fermatschen Primzahlen, und seine Lösung dürfte auf dieselben Schwierigkeiten stossen. M. ALTWEGG, Zürich.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), L. BERNSTEIN (Tel Aviv), E. GISI (Basel), F. GOLDNER (London).

Aufgabe 153. $2N$ sei die (grosse) Anzahl der Elemente eines Kollektivs, in welchem in gleichen Zeitintervallen immer wieder zwei Elemente in völlig ungeordneter und gleichberechtigter Weise zur Berührung kommen. Auf Grund dieser Annahme kann man den Zeitraum von einem solchen Kontakt bis zum nächsten als Zeiteinheit wählen und bei der Betrachtung solcher «Kontaktpaare» die Gesetze der klassischen Wahrscheinlichkeit anwenden. Ferner sei M ein Merkmal, welches stets und nur dann auf ein merkmalfreies Element übergeht, wenn letzteres mit einem bereits das Merkmal tragenden Element Kontakt bekommt. Dadurch wird und verbleibt dieses Element Merkmalträger.

Welche Funktion des Zeitablaufs beschreibt *durchschnittlich* die Merkmalausbreitung im Kollektiv bei hinreichend grossem N? [1] A. UNTERBERGER, Bludenz.

Lösung des Aufgabenstellers: Sind x Elemente bereits mit M behaftet, so ist die klassische Wahrscheinlichkeit für eine Merkmalinfektion beim nächsten Kontakt $x(2N - x)/N(2N - 1)$, das heisst, x wird sich nach $N(2N - 1/x(2N - x)$ «Zeiteinheiten» um 1 vermehren. Bezeichnet die Funktion $t = f(x)$ den gesuchten Zusammenhang, dann ist der letzte Bruch Differenzenquotient von $f(x)$, und da N gross ist, gilt

$$f'(x) = \frac{N(2N - 1)}{x(2N - x)}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$t = \frac{2N - 1}{2} \ln \frac{x}{2N - x},$$

wofür, wieder weil N gross ist, $t = N \ln[x/(2N - x)]$ gesetzt werden darf. Durch eine Koordinatentransformation können wir diesen Ausdruck in

$$t = N \ln \frac{N + x}{N - x}$$

[1] Vgl. E. ROTH-DESMEULES, *Der Hyperbeltangens in der Biologie*, El. Math. *6*, 15 (1951).

überführen und erhalten daraus durch Umkehrung

$$x = N \operatorname{tgh} \frac{t}{2N}.$$

Aufgabe 154. Zeige, dass neben dem bekannten Satz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \frac{\pi}{4},$$

auch gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15 \cdot 17} \mp \cdots = \frac{\pi}{48}.$$

B. VAN DER POL, Genf.

Lösung: Da die vorgelegte Reihe absolut konvergiert, sind die folgenden Umformungen erlaubt. Durch Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)(6n+3)(6n+5)} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{6n+1} - \frac{2}{6n+3} + \frac{1}{6n+5} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+3} + \frac{1}{6n+5} \right) - \frac{1}{24} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Da $6n+1$, $6n+3$, $6n+5$ zusammen für $n=0$ bis $n=\infty$ alle ungeraden Zahlen liefern, ist die vorletzte Summe mit der Reihe für $\pi/4$ identisch, und man kann die beiden letzten Summen zusammenfassen zu

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{48}.$$

H. WAGNER, Karlsruhe.

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel Aviv), P. BUCHNER (Basel), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz).

Neue Aufgaben

182. Les plus petits restes positifs qu'on obtient en divisant les termes de la suite

$$a, \quad (a+v)\,r, \quad (a+2v)\,r^2, \quad \ldots$$

par le nombre premier p, forment une suite périodique. Démontrer que si r est une racine primitive de la congruence de FERMAT $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, et v n'est pas un multiple de p, la plus petite période est $p(p-1)$.

H. BREMEKAMP, Delft.

183. Gegeben sind drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{3}$. Man wähle auf jedem der drei Kreise k_j je einen Punkt P_j derart, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche entsteht. Man zeige ausserdem, dass (für beliebige Radienverhältnisse) die gemeinsame Kreismitte stets Höhenschnittpunkt aller Dreiecke mit maximaler Fläche ist. R. BEREIS, Wien.

184. In der Gruppentheorie werden für nichtkommutative Gruppen spezielle höhere Kommutatoren auf folgende Weise rekursiv definiert:

$$(x, y) = x\,y\,x^{-1}\,y^{-1},$$

$$(x, y, y) = [(x, y), y] = x\,y\,x^{-1}\,y\,x\,y^{-1}\,x^{-1}\,y^{-1} \quad \text{usw.}$$

Enthält der Kommutator n Elemente y, so ist

$$(x, y, y, \ldots, y) = \prod_{k=1}^{2^n} x^{a_k} y^{b_k},$$

wo $a_k = (-1)^{k+1}$. Man bestimme b_k als Funktion von k. E. TROST, Zürich.

Literaturüberschau

HANS SCHWERDTFEGER:

Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices

280 Seiten, Verlag P. Noordhoff, Groningen 1950

Der Matrizenkalkül wurde zuerst von HAMILTON 1853 unter dem Namen «Linear and vector functions» eingeführt, während CAYLEY im folgenden Jahr die Bezeichnung «Matrix» schuf, aber nur in Verbindung mit einem Koeffizientenschema und nicht im Zusammenhang mit einem Kalkül. Ebensowenig wie die Arbeiten dieser Forscher fand die «Ausdehnungslehre» von GRASSMANN den verdienten Widerhall. LAGUERRE, FROBENIUS und SYLVESTER entdeckten die Sätze neuerdings und verschafften endlich dem Gedankengut allgemeine Anerkennung. Im ersten Viertel unseres Jahrhunderts zeigte sich dann, dass der linearen Algebra und dem Matrizenkalkül grundlegende Bedeutung auf allen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen zukommt.

Das vorliegende Werk von H. SCHWERDTFEGER, entstanden aus Vorlesungen an der Universität Adelaide, kann als Lehrbuch in dieses neuartige Gebiet nur warm empfohlen werden. Ohne tiefere algebraische Kenntnisse vorauszusetzen, dringt es von der Koordinatengeometrie aus rasch in dieses abstrakte Gebiet vor. Zuerst werden die geometrischen Grundbegriffe, der Zahlraum, die lineare Abhängigkeit, der Austauschsatz von STEINITZ, parallele Mannigfaltigkeiten ausführlich besprochen. Im zweiten Kapitel werden die Substitutionen, Transformationen und der Matrizenkalkül sauber und klar dargestellt. Anschliessend folgen die bilinearen und quadratischen Formen, Äquivalenz und Kongruenz von Matrizen, symmetrische Matrizen mit komplexen Elementen, Hermitesche Formen und schiefsymmetrische Matrizen. Das vierte Kapitel ist dem wichtigen Gruppenbegriff gewidmet. Mit den gewonnenen Mitteln wird dann die Theorie des Nullsystems entwickelt. Jedem Abschnitt sind instruktive Beispiele beigegeben. *P. Buchner.*

P. WIJDENES: *Vlakke Meetkunde*

304 Seiten, Verlag P. Noordhoff, Groningen 1952

Diese Theorie elementarer planimetrischer Konstruktionen wird manchem Lehrer als Ergänzung des Schulstoffes sehr willkommen sein. Schon als dritte Aufgabe wird jene behandelt, mit der diese Zeitschrift[1]) eröffnet wurde: ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen, allerdings ohne die elegante Lösung zu verwenden, welche G. N. VLAHAVAS in El. Math. 7, 37 (1952) gab.

Es werden Aufgaben über geometrische Örter und den Satz von PYTHAGORAS gelöst. Alsdann folgen Aufgaben über die Proportionalität, die Sätze von APOLLONIUS, MENELAOS und CEVA, die Eulersche Gerade und das vollständige Viereck. Es wird die Konstruktion algebraischer Ausdrücke gezeigt, Aufgaben über den Peripheriewinkelsatz, den Neunpunktekreis, die Stewartsche Gleichung, das Theorem von SIMSON-WALLACE erklärt. Ein besonderer Abschnitt ist den regelmässigen Vielecken, der Kreisfläche und dem Kreisumfang gewidmet.

Das Buch schliesst mit Aufgaben über die Potenz, die Inversion, das Berührungsproblem von APOLLONIUS, die harmonische Lage und Extremwerte. Die Lösungen sind so leichtverständlich dargestellt, dass die holländische Sprache kaum ein Hemmnis darstellt. Das Buch wird sich sicherlich einen Freundeskreis schaffen. *P. Buchner.*

---

[1]) El. Math. *1*, 1 (1946).