Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

rotating through 180°, only that for the conchoid the starting-point is not the centre of rotation but the meeting-point of the moving line with a fixed line outside it. The analogy now appears in a new light. The conchoid is, so to speak, the Euclidean trace or signature of a *negative*-Euclidean circle (or of an infinite number of such circles, according to the position of the point-at-infinity O), for which the base-line or asymptote of the conchoid functions as median line, from the diametral points of which pairs of lines are to diverge keeping a *constant negative and inward distance* towards O. In the negative space determined by the circular rays (absolute involution) in O, the diametral point moves through 180° along the median line to form the total circle. (To be continued.)

GEORGE ADAMS, Clent, Stourbridge (England).

Kleine Mitteilungen

Ein Satz der elementaren Geometrie[1])

Es handelt sich um den Satz: Liegt der Punkt D nicht auf dem Umkreis des gleichseitigen Dreiecks ABC, dann lässt sich aus den Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ ein Dreieck konstruieren. Liegt D auf dem Umkreis, dann sind diese Abstände nicht Seiten eines Dreiecks, sondern lediglich Abstände von drei Punkten einer Geraden, was ohne Rechnung zu beweisen ist. Dreht man das Dreieck ABD um den Punkt A um den Winkel 60° so, dass B nach C und D nach D^* kommt, so erhält man die Strecken $DD^* = DA$, $D^*C = DB$ und DC, welche entweder ein Dreieck bilden oder auf einer Geraden liegen. Liegen die Punkte D, D^* und C auf einer Geraden, dann liegt der Punkt D (wegen des Peripheriewinkels 60° bzw. 120°) auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Die Beweisfigur kann auch als Analysisfigur für die folgende Aufgabe dienen: Gegeben sind die Abstände des Punktes D von den Ecken des gleichseitigen Dreiecks ABC, das Dreieck ist zu konstruieren. Diese Aufgabe hat zwei wesentlich verschiedene Lösungen, da die Strecke DD^* Seite von zwei gleichseitigen Dreiecken ist.

R. LAUFFER, Graz.

Anmerkung der Redaktion. Wie uns Herr A. BAGER (Hiørring) mitteilt, ist die obige Ableitung auch von J. BRATU gefunden worden.

Herr J. W. A. VAN KOL (Eindhoven) teilt uns folgenden einfachen Beweis mit: Man fälle vom Punkte D die Lote auf die Seiten BC, CA, AB des gleichseitigen Dreiecks ABC. Die Fusspunkte P, Q, R bilden im allgemeinen ein nicht ausgeartetes Dreieck. Dessen Seiten PQ, QR, RP sind wegen $PQ = DC \sin 60^0$ usw. proportional den Strecken DC, DA, DB. Aus diesen lässt sich somit ein dem Dreieck PQR ähnliches Dreieck konstruieren. Liegt D auf dem Umkreis von ABC, so ergibt sich der Sonderfall, dass P, Q, R einer Geraden angehören.

Mit der nachfolgenden Arbeit schliessen wir die Publikationen zum Satz von POMPEÏU ab.

Généralisation d'un théorème de M. Pompeïu

Dernièrement, M. PAVLOVIĆ a donné dans cette revue[2]) une démonstration géométrique d'un théorème de M. POMPEÏU: On peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point aux sommets d'un triangle équilatéral[3]). Nous donnons ici une généralisation de ce théorème pour un espace de dimension quelconque.

---

[1]) Siehe unter dem gleichen Titel El. Math. *8*, 65 (1953).

[2]) S. V. PAVLOVIĆ, El. Math. *8*, 13 (1953).

[3]) D. POMPEÏU, Bull. Math. Phys. Ecole polyt. Bucarest *6*, 6–7 (1936).

Notons d'abord sans démonstration les propriétés suivantes:

(1) Soit $f_n(x, a_1, \ldots, a_{n+1}) = |b_{ij}|$ $(i, j = 1, \ldots n)$,

$$b_{ii} = a_1^2 + a_{i+1}^2 + 2\,x\,a_1\,a_{i+1}, \quad b_{ij} = a_1^2 + x\,(a_1\,a_{i+1} - a_{i+1}\,a_{j+1} + a_{j+1}\,a_1).$$

Pour tout a_i, $f_n \geqq 0$ pour $-1 \leqq x \leqq 1/n$.

(2) Considérons $s \leqq n+1$ hyperplans de E^n qui se coupent tous sous le même angle φ_s. (Pour $s = n+1$, on a un simplexe régulier, $\cos\varphi_{n+1} = 1/n$).

Soient P un point quelconque, $a_1, \ldots, a_s$ ses distances algébriques aux s hyperplans. La distance $[i, j]$ de P à l'intersection E^{n-2} des hyperplans i et j est donnée par

$$[i, j]^2 = (a_i^2 + a_j^2 + 2\,a_i\,a_j \cos\varphi_s)\,\frac{1}{\sin^2\varphi_s}, \quad -1 = \cos\pi \leqq \cos\varphi_s \leqq \frac{1}{s-1}.$$

(3) Le volume V_k d'un simplexe $A_1 \ldots A_{k+1}$ $(\overline{A_i\,A_j} = [i, j])$ est donné par

$$2(k!)^2\,V_k^2 = |c_{ij}| \quad (i, j = 1, \ldots, k),$$

$$c_{ii} = 2\,[1, i+1]^2, \quad c_{ii} = [1, i+1]^2 - [i+1, j+1,]^2 + [j+1, 1]^2.$$

(4) Pour que l'on puisse construire un simplexe dont les arêtes $A_i A_j$ aient des longueurs données $[i, j]$, il faut et il suffit que $|c_{ij}| \geqq 0$.

(5) En remplaçant dans (3) $[i, j]$ par la valeur (2), on trouve la fonction de (1), donc en vertu de (4) on a le théorème général suivant:

Etant donnés $s \leqq n+1$ hyperplans $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ de E^n qui se coupent sous le même angle, nommons $[i, j]$ la distance d'un point P à l'intersection des hyperplans α_i et α_j. Quel que soit P, il existe un simplexe $A_1, \ldots, A_s$ dont les arêtes $A_i A_j$ ont les longueurs $[i, j]$.

Cette propriété n'a pas lieu si les angles ne sont pas égaux.

(6) Dans le cas du simplexe régulier, $x = \cos\varphi_{n+1} = 1/n$, donc

$$f_n\left(\frac{1}{n}, a_1, \ldots, a_{n+1}\right) = K\left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_1 \ldots a_{n+1}}{a_1}\right]^2.$$

L'hypersurface (simple) déterminée par $f_n = 0$ contient les E^{n-2} du simplexe, car $a_i = a_j = 0$ est une solution de $f_n = 0$. Elle est invariante pour toute permutation des a_i. Elle est d'ordre n.

Rappelons qu'il existe une correspondance ponctuelle relative au simplexe: Tout point P peut être considéré comme le foyer principal d'une hyperquadrique de révolution inscrite au simplexe. Soit P' le deuxième foyer principal. Nous avions nommé la transformation $P \rightleftarrows P'$ correspondance des foyers et nous avions montré que toute hypersurface d'ordre n contenant les E^{n-2} du simplexe est la transformée d'un hyperplan dans la correspondance des foyers[1]). Comme, dans notre cas, la variété $f_n = 0$ reste invariante pour toute permutation des a_1, il doit en être de même pour l'hyperplan correspondant qui est nécessairement l'hyperplan à l'infini. L'hypersurface $f_n = 0$ est donc le lieu des foyers principaux des paraboloïdes de révolution inscrits au simplexe. Par conséquent, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1° *P est le foyer principal d'un paraboloïde de révolution inscrit à un simplexe régulier.*

2° *Les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les faces du simplexe se trouvent dans un hyperplan* (généralisation de la droite de SIMPSON, hyperplan que nous avions nommé podaire de P).

3° *Les distances $[i, j]$ de P aux $E^{n-2} = (\alpha_i, \alpha_j)$ du simplexe déterminent un simplexe $A_1 \ldots A_{n+1}$ dégénéré* $\cdot(A_i A_j = [i, j])$.

4° *La somme des inverses des distances* (algébriques) *de P aux faces du simplexe est nulle* [si P n'est pas sur le simplexe].

---

[1]) J.-P. SYDLER, Comm. Math. helv. *19* (1946/47).

Le lieu des points pour lesquels le volume du simplexe correspondant est constant, c'est-à-dire $f_n = \text{const} = K\,T^2$, se compose des deux hypersurfaces $\Phi(T)$ et $\Phi(-T)$:

$$\Phi(T) = \sum_i \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{a_i} - T = 0, \qquad \Phi(-T) = \sum_i \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{a_i} + T = 0.$$

Les variétés $\Phi(T)$ sont également d'ordre n. Comme elles ont les mêmes symétries que le simplexe régulier, on voit que, pour certaines valeurs de T, les $\Phi(T)$ n'ont pas de partie réelle, le centre du simplexe jouant un rôle d'extrême. Soit d la distance du centre aux faces du simplexe:

$$\Phi(T_0) = (n+1)\,d^n - T_0 = 0.$$

Pour le volume correspondant, on a

$$V_0^2 = \frac{W^2}{(n^2-1)^n},$$

où W désigne le volume du simplexe régulier considéré:

Le lieu des points réels pour lesquels le volume V du simplexe associé est constant se compose de deux parties pour $V^2 \leqq W^2/(n^2-1)^n$ et d'une seule pour $V^2 > W^2/(n^2-1)^n$. Précisons enfin ces résultats dans le cas du plan: Les courbes $\Phi(T)$ sont de deuxième ordre, doivent avoir les mêmes symétries que le triangle équilatéral; ce sont donc des cercles concentriques. En particulier, pour $T = 0$, on obtient le cercle circonscrit au triangle. Nous pouvons compléter ainsi le théorème dont nous étions partis:

On peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point du plan aux sommets d'un triangle équilatéral de centre M et d'aire W. Le lieu des points pour lesquels ce triangle associé a une aire constante V se compose de deux cercles réels de centre M et de rayons

$$\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}\,(W \pm 3\,V)} \quad \text{pour } V^2 \leqq \frac{W^2}{9}$$

et d'un seul cercle réel de centre M et de rayon

$$\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}\,(W + 3\,V)} \quad \text{pour } V^2 > \frac{W^2}{9}.$$

J.-P. SYDLER, Zurich.

Um den Satz von Wilson

Bekanntlich besagt der sogenannte Wilsonsche Satz:

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n},$$

wenn n eine Primzahl ist. In W. MANTELS *Getallenleer*, Kap. 7, § 3, lesen wir hierüber: «Der Satz ist merkwürdig, da er niemals stimmt, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, und deshalb ein Kennzeichen für die Primzahlen bildet. Eine weitere Besonderheit ist, dass man heutzutage Zweifel darüber geäussert hat, ob WILSON tatsächlich gelebt hat.»

In R. FUETER, *Synthetische Zahlentheorie*, steht im II. Kapitel, § 8: «Der Cambridger Professor E. WARING hat in seinen *Meditationes algebraicae* (Cambridge 1770, S. 218) den Satz als von J. WILSON herrührend ohne Beweis veröffentlicht.»

Mehr hat der Schreiber dieser Zeilen anfangs über den Ursprung des Satzes und seinen *Entdecker* nicht gefunden, bis die nützlichen Hinweise des Herrn Prof. BUCHNER, dem hier Dank ausgesprochen sei, ihn in die Lage versetzt haben, Klarheit zu bringen.

In JOHANNES TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Bd. I, S. 103, finden wir: «Von E. WARING (*Meditationes algebraicae*, 1762) zuerst erwähnt und J. WILSON (1741–1793) zugeschrieben, aber schon ein Jahrhundert vorher von LEIBNIZ erkannt.»

In H. WEBER und J. WELLSTEIN, *Encyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I, S. 264: «Die erste Erwähnung dieses Satzes findet sich in WARINGS *Meditationes algebraicae*, deren erste Auflage 1770 (?) erschien: ‚Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Ioannes Wilson Armiger.' Dieser IOANNES WILSON ARMIGER ist ohne Zweifel identisch mit Sir JOHN WILSON, der 1741–1793 lebte, von dem es in der *National Biography*, LXII, 107 (London 1900) heisst: 'While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on EDWARD WARING's *Miscellanea analytica* by WILLIAM POWELL'».

Es ist hier unwesentlich, ob die erste Auflage der Arbeit WARINGS 1762 oder 1770 erschienen ist. Wichtig ist, dass er diesen WILSON gekannt haben muss: Er nennt ihn ja einen «vir clarissimus». Die obenerwähnte *National Biography* behauptet, dass WILSON schon als «undergraduate», das heisst als angehender Wissenschaftler, eine beachtenswerte Abhandlung geschrieben habe. Mit dieser Kenntnis versehen, können wir uns nicht länger dem von W. MANTEL geäusserten Zweifel, ob WILSON tatsächlich gelebt habe, anschliessen.

RENÉ FURNÉE, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 165. Man beweise: Für $(a, n) = 1$ ist

$$x \equiv a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{k\,a}{n}\right] \pmod{n}$$

Lösung der Kongruenz $a\,x \equiv 1 \pmod{n}$.

B. VAN DER POL, Genf.

Lösung: Wir setzen

$$k\,a = q_k\,n + r_k, \qquad q_k = \left[\frac{k\,a}{n}\right] \; (1 \leqq k \leqq n-1). \tag{1}$$

Wegen $(a, n) = 1$ ist $a, 2\,a, \ldots, (n-1)\,a$ ein vollständiges Restsystem mod n. Nach (1) ist $r_k \equiv k\,a \pmod{n}$ und $0 \leqq r_k < n$, also ist die Gesamtheit der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ identisch mit der Gesamtheit der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$. Aus (1) folgt durch Quadrieren und Addition der entstehenden $n-1$-Gleichungen

$$a^2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = n^2 \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 2\,n \sum_{k=1}^{n-1} q_k\,r_k + \sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 .$$

Aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(2\,n-1)$$

folgt weiter

$$6\,n \sum_{k=1}^{n-1} q_k^2 + 12 \sum_{k=1}^{n-1} q_k\,r_k = (n-1)\,(2\,n-1)\,(a^2-1).$$

Da

$$q_k = \left[\frac{k\,a}{n}\right], \qquad r_k \equiv k\,a, \pmod{n}$$

ergibt sich schliesslich

$$12\,a \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{k\,a}{n}\right] \equiv a^2 - 1 \pmod{n}$$

oder

$$a \left\{ a - 12 \sum_{k=1}^{n-1} k \left[\frac{k\,a}{n}\right] \right\} \equiv 1, \pmod{n}$$

was zu beweisen war.

A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte F. GOLDNER (London).