Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

points, are the tangent planes from d to the required sphere. The three-dimensional construction is thus completed.

As will be readily confirmed, the equation of the conchoidal octic surface is as follows:

$$\left.\begin{aligned}&\left[(X^2+Y^2+Z^2+m^2W^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^2-r^2Z^2W^2\right]^2\\&\quad=4\,m^2W^2(X^2+Y^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^4.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

For the plane $Y=0$, this leads back (substituting Z, W for Y, Z respectively) to equation (13) for the symmetrical pair of conchoids as in figure 4. As in figure 6, § 9, a family of surfaces of this type will envelop each negative sphere. Inserting $Z=0$ in (14), we obtain $W=0$ counting quadruply and the nodal circle $X^2+Y^2-m^2W^2=0$ counting doubly; this circle is of course an isolated feature if the plane conchoid sections have isolated points for nodes.

GEORGE ADAMS, Clent, Stourbridge (England).

Kleine Mitteilungen

Drei neue Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Kreises

In dieser Zeitschrift[1]) wurden kürzlich mehrere Verfahren mitgeteilt, um zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal ein nahezu flächengleiches Quadrat zu konstruieren oder, was dasselbe ist, Näherungswerte für

$$\sqrt{\pi}=1{,}772\,453\,85\ldots$$

elementargeometrisch zu realisieren. Wir vermehren diese Möglichkeiten hier um drei einfache und recht genaue Konstruktionen, deren Berechnung mit Hilfe der Satzgruppe des Pythagoras keinerlei Schwierigkeiten bietet.

Wir bezeichnen durchwegs mit O und r Mittelpunkt und Radius des gegebenen Kreises, mit A und B Eckpunkte des Näherungsquadrates.

a) Der Wert

$$\sqrt{17-8\sqrt{3}}=\sqrt{3{,}143\,59\ldots}=1{,}773\,01\ldots$$

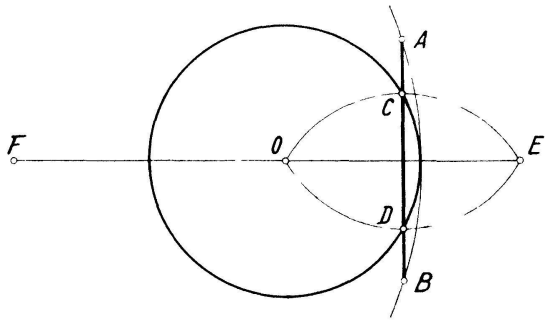
ist zwar nur um wenig genauer als die oben erwähnten Näherungen. Hingegen erlaubt er eine bemerkenswert einfache Konstruktion (Figur 1). Mit dem Radius r schlagen wir aus einem beliebigen Peripheriepunkt C des gegebenen Kreises den Bogen ODE, aus dem Schnittpunkt D den Bogen OCE. Wird die Strecke EO über O hinaus um $OF=2r$ verlängert, so schneidet der Kreis mit Zentrum F und Radius $3r$ aus der Geraden CD eine Sehne der Länge $AB=r\sqrt{17-8\sqrt{3}}$, also die gesuchte Quadratseite. Man beachte nämlich, dass die Hälfte dieser Sehne Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $FA=3r$ und der zweiten Kathete $2r+(r\sqrt{3})/2$ ist.

[1]) E. VOELLMY, *Die Quadratur des Kreises in Näherungskonstruktionen*, El. Math. *5*, 12–15 (1950). A. ZINNIKER, *Zwei neue Näherungskonstruktionen der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal*, El. Math. *6*, 112–113 (1951). Neben den in diesen Mitteilungen zu findenden weitern Literaturvermerken sei u. a. auf TH. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen* (Teubner, Leipzig 1911), sowie auf ausserordentlich scharfe Näherungen von S. RAMANUJAN, *Modular Equations and Approximations to* π, Quart. J. *45*, 350–372 (1914) hingewiesen.

b) Der Wert

$$\frac{2}{25}\sqrt{1201}-1=1{,}772\,435\ldots$$

bietet erhebliche Genauigkeit und eine reizvolle Konstruktionsmöglichkeit (Figur 2), indem wir von einem dem gegebenen Kreis einbeschriebenen Dreieck CDB mit dem

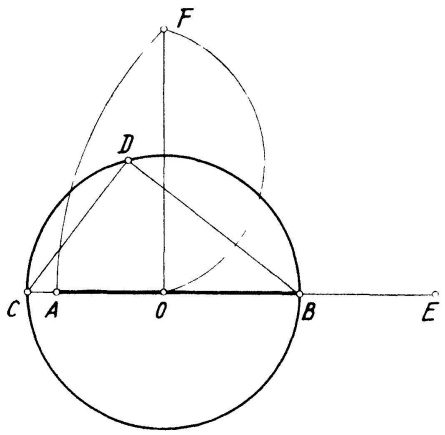


Figur 1

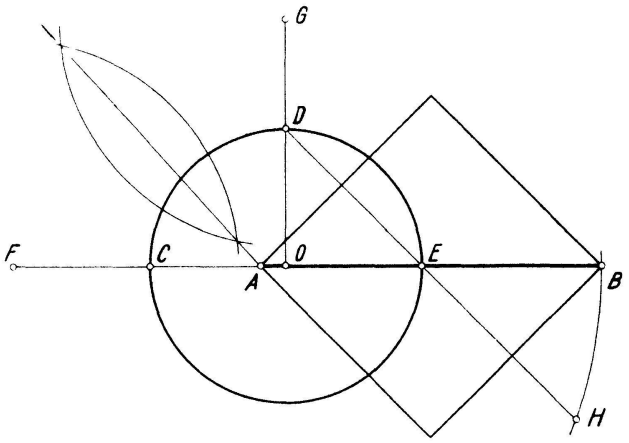
pythagoreischen Seitenverhältnis 3:4:5 ausgehen können. Die Hypotenuse CB dieses Dreiecks, zugleich Durchmesser, werde um $BE = r$ verlängert. Schneidet nun der Kreis um D durch O die Mittelsenkrechte von CB ein zweites Mal in F, der Kreis um E durch F den Durchmesser CB in A, so bildet

$$AB=\left(\frac{2}{25}\sqrt{1201}-1\right)r$$

die Seite des gesuchten Quadrates.



Figur 2



Figur 3

Zur Bestätigung braucht man nur zu bemerken, dass OF doppelt so lang ist wie die Höhe $24\,r/25$ des pythagoreischen Dreiecks, so dass sich

$$EA=EF=r\sqrt{2^2+\left(\frac{48}{25}\right)^2}$$

ergibt.

c) Die vorige Näherung sowie die bei E. VOELLMY (l. c.) der Genauigkeit wegen wiedergegebene von KUNZE-ENRIQUES wird durch die Approximation

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{11}-0{,}81)=1{,}772\,451\,3\ldots$$

noch übertroffen. Wir konstruieren die Diagonale $AB = (\sqrt{11} - 0{,}9^2)\, r$ des gesuchten Quadrates (Figur 3). Dazu mögen C, D und E drei der Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit einem konzentrischen rechtwinkligen Achsenkreuz bezeichnen, derart, dass EC ein Durchmesser ist. Wir verlängern diesen um $CF = r$, ebenso den Radius OD um $DG = 4\, r/5$ und erhalten als Schnittpunkt von CE mit der Mittelsenkrechten von FG den Diagonalendpunkt A. Den andern Endpunkt B finden wir, indem DE auf die Länge $DH = 3\, r$ verlängert und $CH = CB$ auf die Durchmessergerade CE abgetragen wird.

Zur Berechnung findet man einerseits das rechtwinklige Dreieck CDH mit der Hypotenuse $CH = r\sqrt{11}$, anderseits über AF als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete auf der gezeichneten Mittelsenkrechten liegt. C ist Fusspunkt der Höhe von der Länge $OG/2 = 9\, r/10$. Somit muss der Hypotenusenabschnitt CA nach dem Höhensatz $81\, r/100$ betragen.

Wir erwähnen noch, dass die in den beiden letzten Konstruktionen notwendigen (in den Abbildungen weggelassenen) Streckenteilungen mit Vorteil unter Ausnutzung der ohnehin notwendigen Linien und Teilpunkte gezeichnet werden, und dass sich bei günstiger Anordnung der Konstruktionsschritte weitere geometrographische Vereinfachungen erzielen lassen.

Die verwendeten Näherungswerte[1]) stammen vom ersten, Vereinfachungen in den Konstruktionen vom zweiten der Verfasser.

H. Riedwil (Biglen), H. Debrunner (Bern).

Aufgaben

Aufgabe 145. Es sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, es sei $\overline{\lim} \log n_k / \log k = \infty$. Dann ist $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$ transzendent. P. Erdös, London.

Solution: If $\overline{\lim}\, n_{k+1}/n_k = \infty$ then α is a Liouville number. Hence for the remainder of the proof we may assume that there is a c such that $n_{k+1} < c\, n_k$ for all k. Under this assumption we establish the following:

Lemma: Let

$$S_k = \left\{ \sum_{i=1}^{l} n_{k_i} \mid l \leqq k \right\}$$

then for every $\varepsilon > 0$ there is an element s_{k+1} of S_{k+1} such that

$$|s_{k+1} - s_k| > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s_k in S_k and

$$s_{k+1} - s'_{k+1} > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s'_{k+1} in S_{k+1}, $s'_{k+1} < s_{k+1}$.

Proof: For every $\varepsilon_1 > 0$ there must exist an x such that the number of elements of S_{k+1} below x is less than x^{ε_1}. Hence there must exist a pair s'_k, s_k of successive elements of S_k such that

$$s'_k < s_k < x \quad \text{and} \quad s_k - s'_k > x^{1-\varepsilon_1}.$$

If we choose x so large that $x^{\varepsilon_1} > \max(c, 2)$ then there must also exist an n_l in S such that

$$x^{1-3\varepsilon_1} < n_l < x^{1-2\varepsilon_1}.$$

[1]) Weitere gefundene Approximationen sind

$$\frac{1}{5}\sqrt{11 + 4\sqrt{285}}, \quad \frac{\sqrt{1018}}{18}, \quad \frac{2}{7}(11 - \sqrt{23}).$$