Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VII eine *Kurve mit unendlich vielen Umläufen* erhalten. Die Konstruktion ergibt eine *Spirale* mit einer Symmetrieachse und zwei Wickelpunkten (Figur 13).

Der Neigungswinkel α ist in diesem Falle (mit $\alpha_0 = 0$)

$$\alpha = \int \frac{ds}{R(s)} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \frac{s}{2a}. \tag{13}$$

Variiert s von 0 bis zur halben Periode $p/2 = a\pi$, so läuft tatsächlich α von 0 bis ∞. Die Berechnung der *Parameterdarstellung der Kurve* führt auf nichtelementare Integrale:

$$x = 2a\mu \int_0^\alpha \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{1 + (\mu\alpha)^2}, \qquad y = 2a\mu \int_0^\alpha \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{1 + (\mu\alpha)^2}. \tag{14}$$

Die Koordinaten der *Wickelpunkte dieser Doppelspirale* sind

$$x_w = \pm a\pi e^{-1/\mu}, \qquad y_w = a\left[e^{-1/\mu}\, \overline{Ei}\left(\frac{1}{\mu}\right) - e^{1/\mu}\, Ei\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right]^{1)}. \tag{15}$$

Die Doppelspirale hat zwischen ihren beiden Wickelpunkten die *endliche Länge* $4a\pi$.

W. KLEPPER, Karlsruhe.

Kleine Mitteilungen

Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper

A. *Einleitung*

Vom Verfasser ist folgender Satz I bewiesen worden[2]:

Satz I: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen Zylinder und nur sie kleinstes Integral der mittlern Krümmung M, symmetrische Doppelkegel und nur diese Körper grösstes M.

In den analogen (L, F)- und (L, V)-Problemen liegen die Verhältnisse nicht so günstig. Immerhin gestattet die verwendete elementare Methode, folgende Sätze zu beweisen:

Satz II: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen Kegelstümpfe (im weitern Sinne) und nur diese Körper kleinste Oberfläche F.

Satz III: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen

im Intervall	$0 \leqq L \leqq \frac{4l}{3}$	*Zylinder,*
im Intervall	$\frac{4l}{3} < L < \sqrt{2}\, l$	*Kegelstümpfe* (im engern Sinne),
im Intervall	$\sqrt{2}\, l \leqq L < \infty$	*Kegel*

und nur diese Körper kleinstes Volumen V.

---

[1]) W. GRÖBNER und N. HOFREITER, *Integraltafel*, Bd. 2 (Springer, Wien und Innsbruck 1950), Nr. 333, 67a und 66a. Es ist

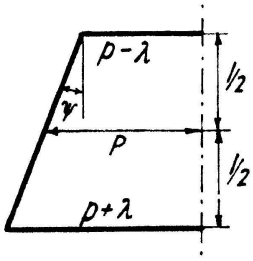
$$Ei(x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt, \qquad \text{sowie} \qquad \overline{Ei}(x) = \frac{1}{2} Ei^+(x) + \frac{1}{2} Ei^-(x),$$

wobei $Ei^+(x) = Ei(-x e^{-i\pi})$ und $Ei^-(x) = Ei(-x e^{i\pi})$ gilt.

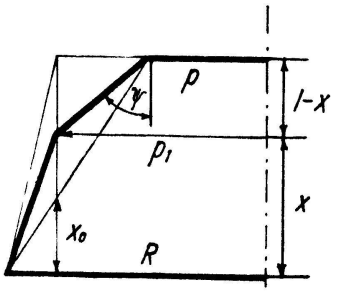
[2]) Ein Minimum-Maximum-Problem über konvexe Rotationskörper.

Wie schon öfters angeführt, bedeutet die Einführung der *polygonalen Rotationskörper* keine Beschränkung der Allgemeinheit[1]).

Bezüglich der verwendeten Methode verweise ich auf eine schon publizierte Arbeit[2]).



Figur 1



Figur 2

Für die Teilklasse der Kegelstümpfe (im weitern Sinne), der die Minimalkörper angehören, entnimmt man der Figur 1 folgende Daten:

$$\left.\begin{aligned} L &= 2\,p + \sqrt{l^2 + 4\,\lambda^2}, \\ F &= 2\,\pi\,(p^2 + \lambda^2 + p\sqrt{l^2 + 4\,\lambda^2}), \\ V &= \frac{\pi\,l}{3}\,(3\,p^2 + \lambda^2). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mittels der Substitution $p = l\,q/2$ gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} L &= l\,(q + \sec\psi), \\ F &= \frac{\pi\,l^2}{2}\,(q^2 + 2\,q\sec\psi + \operatorname{tg}^2\psi), \\ V &= \frac{\pi\,l^3}{12}\,(3\,q^2 + \operatorname{tg}^2\psi). \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

B. *Beweise*

a) (L, F)-*Problem*

Durch Elimination der Parameter q, ψ folgt aus (1a):

$$2\,F - \pi\,(L^2 - l^2) = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung der Kegelstümpfe besagt, dass derartige Körper, wenn sie in L übereinstimmen, auch gleiches F besitzen. Die zugehörige Kurve in einer (L, F)-Ebene ist als Parabel *beständig von unten konvex*.

Wir wenden uns jetzt dem *Doppelkegelstumpf* I_2[3]) zu. Seine Masszahlen sind (Figur 2):

$$\left.\begin{aligned} L &= R + p + \sqrt{(R - p_1)^2 + x^2} + \sqrt{(p_1 - p)^2 + (l - x)^2}, \\ F &= \pi\,[R^2 + p^2 + (R + p_1)\sqrt{(R - p_1)^2 + x^2} + (p_1 + p)\sqrt{(p_1 - p)^2 + (l - x)^2}]. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

---

[1]) Vgl. H. Hadwiger, *Einige neue Ergebnisse über extremale konvexe Rotationskörper*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg *18*, 38–52 (1952).

[2]) H. Bieri, *Kurvendiskussion als Methode*, Mitt. Naturf. Ges. Bern *8* (1950).

[3]) In die Klasse I werfen wir alle konvexen Rotationskörper, deren Äquatorradius r am Rande liegt, in die Klasse II alle übrigen. Der Index gibt die Zahl der Kegelstümpfe (im weitern Sinne) an, aus denen der Körper aufgebaut ist.

Wenn x das Intervall $x_0 \leqq x \leqq l$ durchläuft, so entsteht eine *einparametrige Doppelkegelstumpfschar*. Man berechnet:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \cos\varphi - \cos\psi; \quad F_x = \pi\,[(R + p_1)\cos\varphi - (p_1 + p)\cos\psi], \\ \frac{dF}{dL} &= \pi\,(R + p_1) + \frac{\pi\,(R - p)\cos\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Mit wachsendem x nimmt φ monoton ab, ψ monoton zu, also dF/dL monoton ab. Die Kurve ist daher *beständig von unten konkav*, so dass wegen der Konvexität der Kegelstumpfkurve die betrachteten Körper nicht extremal sein können. Selbstverständlich darf der obere Kegelstumpf durch einen Kegel ersetzt werden, was die Teilklasse I_2 erst vollständig macht.

Das Verfahren lässt sich schrittweise auf *polygonale Rotationskörper* von 2, 3, ..., n Segmenten anwenden, so dass bei gleichbleibenden Schlüssen der Beweis für die Teilklasse I geleistet ist.

In der Teilklasse II liegen die Verhältnisse etwas verwickelter. Für den *unsymmetrischen Doppelkegelstumpf* II_2 berechnet man (Figur 3):

$$\left.\begin{aligned} L &= p + p_1 + \sqrt{(R - p_1)^2 + x^2} + \sqrt{(R - p)^2 + (l - x)^2}, \\ F &= \pi\,[p_1^2 + p^2 + (R + p_1)\sqrt{(R - p_1)^2 + x^2} + (R + p)\sqrt{(R - p)^2 + (l - x)^2}]. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

Wir setzen:

$$2\,F - \pi\,(L^2 - l^2) = \Delta. \tag{5}$$

Einführen von (4a) in (5) liefert

$$\Delta^* = 2\,x\,(l - x)\left[1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]. \tag{5a}$$

Mit Ausnahme der Stellen $x = 0$, $\varphi = \pi/2$; $x = l$, $\psi = \pi/2$ ist (5a) *positiv definit*. Für jeden vom Nullpunkt verschiedenen Punkt der L-Achse ist aber Δ negativ. Also liegt die Kurve der betrachteten Doppelkegelstümpfe *ganz nicht unterhalb der Kegelstumpfkurve*, und die betrachteten Körper sind nicht extremal. Wieder darf man einen oder sogar beide Kegelstümpfe durch Kegel ersetzen, so dass der genannte Tatbestand für die ganze Teilklasse II_2 zutrifft. Von ihr aus erreicht man mit der oben angewendeten Deformation die ganze Teilklasse II. Wegen des beständigen Wechselspiels *Konvexität–Konkavität* ist damit der Satz allgemein bewiesen.

Das Ergebnis lässt sich durch die Ungleichung

$$F \geqq \frac{\pi}{2}\,(L^2 - l^2) \quad \text{(Gleichheitszeichen nur für Kegelstümpfe)} \tag{6}$$

ausdrücken.

Das behandelte Problem ist ein nichttriviales Beispiel für ein *uneigentliches absolutes Minimum*.

b) (L, V)-*Problem*

In einer (L, V)-Ebene lautet die Gleichung der *Zylinderkurve* ($\lambda = 0$)

$$V = \frac{\pi\,l}{4}\,(L - l)^2, \tag{7}$$

die Gleichung der Kegelkurve ($\lambda = p$)

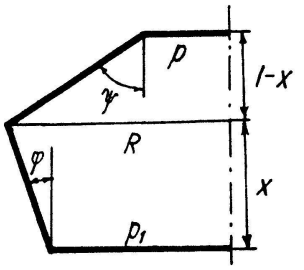
$$V = \frac{\pi\,l}{12} \cdot \frac{(L^2 - l^2)^2}{L^2}. \tag{8}$$

Beide Kurven sind von unten konvex und schneiden sich, wie man durch Gleichsetzen

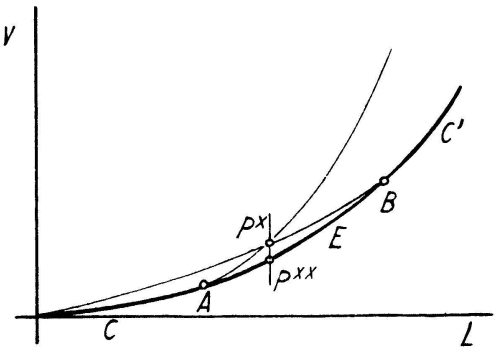
der rechten Seiten und Ausrechnung der linken Seiten von (7), (8) feststellt, rechts vom Nullpunkt noch genau einmal im Punkte P^x mit den Koordinaten

$$L^x = l\,\frac{(1+\sqrt{3})}{2}, \qquad V^x = \frac{\pi\, l^3}{8}\,(2-\sqrt{3}). \tag{9}$$

Überdies verläuft die Kegelkurve im Intervall $0 < L < L^x$ oberhalb, im Intervall



Figur 3



Figur 4

$L^x < L < \infty$ unterhalb der Zylinderkurve. Bei dieser Sachlage existiert offenbar eine *Enveloppe*. Die Nullstellen der Enveloppenbedingung

$$\frac{\partial V}{\partial p}\cdot\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{\partial V}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial L}{\partial p}$$

sind

a) $\lambda = 0$ (Zylinderkurve, geometrischer Ort von Kurvenenden),

b)
$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{l^2+4\lambda^2}}{6}; \qquad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{36\,p^2 - l^2}; \\ 0 &\leqq |\lambda| \leqq p; \qquad \frac{l}{6} \leqq p \leqq \frac{l}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) gewinnt man durch Einsetzen und Elimination:

$$V = \frac{\pi\, l}{48}\,(3\,L^2 - 4\,l^2). \tag{11}$$

Die Enveloppe, eine *Parabel*, ist ebenfalls *von unten konvex*. Ferner wächst die Steigung des ganzen Kurvenzuges CEC' (Figur 4) mit wachsendem L monoton, so dass für die geplanten Körperdeformationen die günstigsten Voraussetzungen vorhanden sind[1]).

Die Masszahlen des Doppelkegelstumpfes I_2 lauten:

$$\left.\begin{aligned} L &= R + p + \sqrt{(R-p_1)^2 + x^2} + \sqrt{(p_1-p)^2 + (l-x)^2}, \\ V &= \frac{\pi\, x}{3}\,(R^2 + R\,p_1 - p_1\,p - p^2) + \frac{\pi\, l}{3}\,(p_1^2 + p_1\,p + p^2). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Man berechnet:

$$L_x = \cos\varphi - \cos\psi; \quad V_x = \text{const.} \tag{13}$$

---

[1]) Der Kegelstumpf mit dem Bildpunkt P^{xx} senkrecht unter P^x besitzt die Koordinaten

$$L^{xx} = \frac{l\,(1+\sqrt{3})}{2}; \qquad V^{xx} = \frac{\pi\, l^3}{96}\,(3\sqrt{3} - 2).$$

Sein Volumen ist nur um rund 0,007% kleiner als V^x!

Mit wachsendem x nimmt dV/dL monoton ab. Also ist die Kurve *von unten konkav* und liegt deshalb ganz nicht unter dem Kurvenzug CEC' (Figur 4). Das Verfahren lässt sich beliebig oft wiederholen, so dass die Körper der Teilklassen $I_3, I_4, \ldots, I_n$ nicht extremal sein können. Um in der Teilklasse II entsprechend operieren zu können, müssen wir zeigen, dass der Doppelkegelstumpf II_2 nicht extremal ist. Dies ist aber leicht. Durch *partielle Antisymmetrisation*[1]) wird er nämlich in einen Doppelkegelstumpf I_2 übergeführt, der gleiches Volumen, aber grösseres L aufweist, so dass er für das Extremum tatsächlich ausfällt. Wie im ersten Beispiel lässt sich der Beweis jetzt mühelos zu Ende führen[2]).

H. BIERI, Bern.

Ein Vorschlag zur Logarithmentafel

Alle dekadisch geschriebenen Zahlen vom Rang Null nenne ich dekadische Stammzahlen. Stammzahlen seien angedeutet durch N_0, Zahlen vom Rang r seien angedeutet durch N_r. Jede Zahl vom Rang r lässt sich zerlegen in das Produkt aus ihrer Stammzahl und der Potenz 10^r. Der dekadische Logarithmus der Stammzahl N_0 heisst Mantisse aller Numeri N_r, die zu dieser Stammzahl gehören. Der dekadische Logarithmus einer Zahl N_r setzt sich additiv zusammen aus seiner Mantisse und der Kennziffer. Die Kennziffer des Logarithmus einer Zahl N_r ist dabei identisch mit dem Rang r.

Praktische Kennzifferregel

1. Betrachte einen Numerus N_r: Die Anzahl der Stellen, um die das Komma verschoben werden muss, damit die Stammzahl erreicht wird, ist die Kennziffer des Logarithmus.
2. Die Kennziffer ist positiv, wenn der Numerus grösser ist als seine Stammzahl.
3. Die Kennziffer ist Null für alle Stammzahlen.
4. Die Kennziffer ist negativ, wenn der Numerus kleiner ist als seine Stammzahl.

Es wäre zweifellos ein Vorteil, wenn die Logarithmentafel so eingerichtet wäre, dass man von diesen durchsichtigen Kennzifferregeln Gebrauch machen könnte. Es müssten dazu im Rand der Logarithmentafel effektiv die Stammzahlen von 1,000 bis 9,999 stehen, und es müsste der Vordruck der Mantisse, die ja aus drucktechnischen Gründen in Vordruck und Hauptdruck zerlegt ist, effektiv mit 0,... geschrieben werden.

Muster:

num $L_0 = N_0$	$L_0 = \log N_0 =$ mant N_r für alle r									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6,77	0,83					085					

H. HOLLIGER, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 178. In einer Urne befinden sich a_1 Zettel mit der Nummer 1, a_2 Zettel mit Nummer 2, ..., a_k Zettel mit dem Aufdruck k. Ein Zettel wird gezogen. Enthält derselbe die Nummer 1, so wird er in die Urne zurückgelegt. Enthält aber der Zettel den Aufdruck $b \neq 1$, so wird dafür ein Zettel mit der Nummer $b-1$ in die Urne gelegt. Diese Operation wird n-mal ausgeführt. Wie gross ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, einen Zettel mit der Zahl 1 zu ziehen?

P. BUCHNER, Basel.

[1]) Nur der untere Kegelstumpf wird deformiert, und zwar so, dass sein Volumen unverändert bleibt.

[2]) Die Extremalkörper des vorliegenden Problems sind auch Extremalen im $(l; F, V)$-Problem!