Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie

Autor(en): **Sauer, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17363

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band IX Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 15. November 1954

Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie

Viele differentialgeometrische Eigenschaften der Flächen, insbesondere diejenigen, die sich auf die Metrik in der Flächenhaut und nicht auf die Einbettung der Flächenhaut in den Raum beziehen, lassen sich durch analoge «differenzengeometrische» Eigenschaften elementargeometrischer Modelle (Dreiecks- und Vierecksgitter, Streifenmodelle und dergleichen) veranschaulichen. Durch geeignete Grenzübergänge kann man die elementargeometrischen Modelle und ihre differenzengeometrischen Beziehungen in Flächen und deren differentialgeometrische Beziehungen überführen. Die Bedeutung der differenzengeometrischen Betrachtungsweise liegt aber nicht in der Durchführung dieser prinzipiell einfachen, wenn auch manchmal langwierigen Grenzprozesse, sondern in dem unmittelbaren Einblick, den die differenzengeometrischen Zusammenhänge in fundamentale Begriffe und Beziehungen der Differentialgeometrie vermitteln.

Einen besonders starken Anstoss empfing die im Sinne der Differenzengeometrie «anschauliche» Behandlung der Differentialgeometrie durch SEB. FINSTERWALDER, der 1897 in einem Artikel in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung über *Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation* eine Fülle von Anregungen für differenzengeometrische Betrachtungen gab. Später haben dann H. GRAF und der Verfasser dieses Aufsatzes als Schüler von SEB. FINSTERWALDER verschiedene Beiträge zur Differenzengeometrie der Flächen geliefert, und in den letzten Jahren hat ausserdem Herr W. WUNDERLICH die Differenzengeometrie erheblich gefördert.

In dem vorliegenden Aufsatz wird versucht, auf Grund der zahlreichen in der Literatur verstreuten Einzelpublikationen einen kurzen zusammenfassenden Überblick über die bemerkenswertesten anschaulichen Ergebnisse der Differenzengeometrie und der hierbei verwendeten elementargeometrischen Modelle zu geben, wobei von erläuternden Figuren ausgiebig Gebrauch gemacht wird.

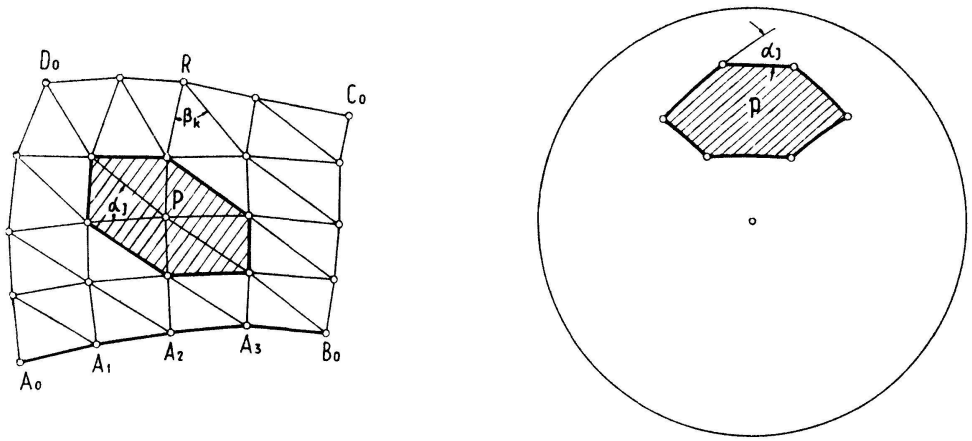
Der erste Abschnitt handelt von Dreiecksgittern und von ebenmaschigen Vierecksgittern; die ersteren werden wir zur Veranschaulichung des Gaußschen Krümmungsmasses und des Integralsatzes von GAUSS und BONNET, die letzteren zur Veranschaulichung der Biegungstheorie der Drehflächen, Gesimsflächen, Affinflächen und Voßschen Flächen verwenden. Ein später nachfolgender Abschnitt wird einerseits von ebeneckigen Vierecksgittern und andrerseits von Streifenmodellen handeln. Mit ersteren kann man die Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung und die Flächen

konstanten negativen Krümmungsmasses, mit letzteren die Differentialgeometrie der Dreh- und Schraubenflächen veranschaulichen.

Dreiecksgitter und ebenmaschige Vierecksgitter

§ 1. *Dreiecksgitter*

1. 1. *Definition.* Unter einem Dreiecksgitter verstehen wir ein einfach zusammenhängendes, aus Dreiecken bestehendes Flächenstück, das von zwei Scharen von



Figur 1*a* Figur 1*b*

Leitpolygonen und einer Schar von Diagonalpolygonen erzeugt wird (Figur 1*a*). Die Leitpolygone liefern ein Vierecksgitter mit im allgemeinen windschiefen Vierecksmaschen, die Diagonalpolygone zerlegen die Vierecksmaschen in Dreieckspaare. Jeder innere Gitterpunkt P ist sechs Dreiecken gemeinsam, die ein Sechskant mit dem Scheitel P bilden. Der Rand des Dreiecksgitters besteht aus vier Leitpolygonen.

1. 2. *Krümmungsmass des Dreiecksgitters*[1]) *in einem inneren Gitterpunkt P.* Nach Festlegung einer Aussen- und Innenfläche des Gitters kann man in eindeutiger Weise jeder Dreiecksmasche eine «nach aussen» weisende Normale zuordnen, die man sich etwa jeweils im Schwerpunkt angebracht denken mag. Die Parallelen zu diesen Normalen durch den Mittelpunkt einer Einheitskugel liefern zu jedem Dreieck des Gitters einen eindeutig bestimmten Punkt der Einheitskugel als sphärisches Bild. Den sechs in einem inneren Gitterpunkt P zusammentreffenden Dreiecken entspricht auf diese Weise ein sphärisches Sechseck p auf der Einheitskugel (Figur 1*b*). Die Dreieckswinkel α_j am Gitterpunkt P sind gleich den Aussenwinkeln des sphärischen Sechsecks; der Flächeninhalt Φ des sphärischen Sechsecks ist daher

$$\Phi(P) = 2\pi - \sum_{j=1}^{6} \alpha_j(P). \tag{1}$$

Hierdurch wird der Flächeninhalt Φ mit Vorzeichen definiert, und zwar auch für sphärische Sechsecke mit sich überschneidendem Rand.

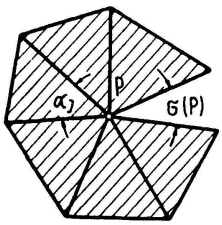
[1]) S. FINSTERWALDER, Jber. Dtsch. Math.-Ver. *6*, H. 2, 1–90 (1897).

Ist $3\,F(P)$ der – positiv definierte – Flächeninhalt der sechs im Gitterpunkt P zusammentreffenden Dreiecke, so bezeichnen wir den Ausdruck

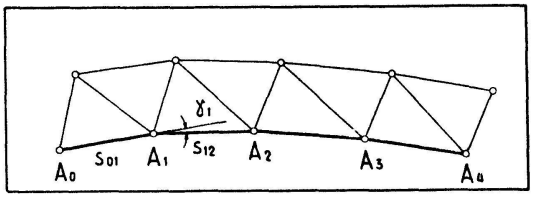
$$K(P) = \frac{\Phi(P)}{F(P)} \tag{2}$$

als Krümmungsmass des Dreiecksgitters im Gitterpunkt P. Wir nehmen hierbei nur den dritten Teil F der Summe der sechs Dreiecksinhalte, weil jedes Dreieck, das keinen Punkt mit dem Randpolygon gemeinsam hat, drei Sechskanten um innere Gitterpunkte angehört.

Löst man die sechs in P zusammentreffenden Dreiecke aus dem Zusammenhang mit dem übrigen Dreiecksgitter und breitet sie nach Aufschneiden längs einer der



Figur 1 *c*



Figur 1 *d*

von P ausgehenden Kanten in die Ebene aus (Figur 1*c*), so entsteht in der ebenen Abwicklung ein – positiver oder negativer – Spaltwinkel

$$\sigma(P) = 2\,\pi - \sum_{j=1}^{6} \alpha_j(P). \tag{3}$$

Nach Gleichung (1) ist $\sigma = \Phi$, so dass man das Krümmungsmass $K(P)$ auch durch

$$K(P) = \frac{\sigma(P)}{F(P)} \tag{4}$$

definieren kann.

1. 3. *Geodätische Krümmung eines Leitpolygons.* Löst man die einem Leitpolygon $A_0\,A_1 \ldots$ auf einer Seite anliegenden Dreiecke aus dem Zusammenhang mit dem übrigen Gitter und breitet sie in die Ebene aus (Figur 1*d*), so entsteht in der ebenen Abwicklung ein ebenes Polygon mit den Winkeln γ_j und den Seiten $s_{j,\,j+1}$; die Winkel γ_j sind nach Festsetzung einer Orientierung des Polygons mit Vorzeichen definiert. Wir bezeichnen den Ausdruck

$$g(A_j) = \frac{\gamma_j}{(s_{j-1,\,j} + s_{j,\,j+1})/2} \tag{5}$$

als Abwicklungskrümmung oder geodätische Krümmung des Leitpolygons $A_0 A_1 \ldots$ im Punkt A_j ($A_j \neq A_0$ und $A_j \neq B_0$).

Ist das Leitpolygon $A_0 A_1 \ldots$ nicht Bestandteil des Randpolygons des Gitters, so kann man sowohl die auf der einen als auch die auf der anderen Seite anliegenden Dreiecke verwenden und hierdurch eine linksseitige und eine rechtsseitige geodätische Krümmung und schliesslich durch das arithmetische Mittel auch eine mittlere geodätische Krümmung definieren.

Man beachte, dass zur Definition sowohl des Krümmungsmasses als auch der geodätischen Krümmung nur die Seiten und Winkel der Gittermaschen, nicht aber die Keilwinkel der Maschenebenen verwendet werden.

1. 4. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Das vorgegebene Dreiecksgitter bestehe aus den Sehnen eines Dreiecksnetzes, das auf einer Fläche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ von Kurven

$$u = u_0 \pm n\,\varepsilon, \quad v = v_0 \pm m\,\varepsilon, \quad u + v = u_0 + v_0 \pm l\,\varepsilon \quad (m, n, l = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

gebildet wird. Hält man u_0, v_0 fest und lässt mit $\varepsilon \to 0$ die Dreiecksnetze der Fläche und ihre Sehnendreiecksgitter immer engmaschiger werden, so konvergiert das Krümmungsmass $K(P)$ der Dreiecksgitter im inneren Gitterpunkt $P(u_0, v_0)$ gegen das Gaußsche Krümmungsmass $K(u, v)$ der Fläche in diesem Punkt. Ebenso konvergiert die – rechtsseitige, linksseitige und mittlere – geodätische Krümmung $g(P)$ der Leitpolygone im Gitterpunkt $P(u_0, v_0)$ gegen die geodätische Krümmung $g(u, v)$ der Kurven $u = u_0$ und $v = v_0$ in diesem Punkt.

Dem letzten Satz der Ziffer 1. 3 entspricht die Tatsache, dass sowohl das Krümmungsmass als auch die geodätische Krümmung durch die Metrik in der Fläche bestimmt ist und nicht von der Einbettung der Fläche in den Raum abhängt.

Wir werden auf den hier eingeführten Grenzprozess fortan häufig zurückkommen und werden ihn kurz als «Grenzprozess $\varepsilon \to 0$" bezeichnen.

§ 2. *Integralsatz von Gauss und Bonnet*

2. 1. *Summensatz*[1]) *für das Krümmungsmass in den inneren Gitterpunkten und die geodätische Krümmung des Randpolygons eines Dreieckgitters.* In einem aus $2\,m\,n$ Dreiecken bestehenden Dreieckgitter (Figur 1*a*) bezeichnen wir mit α_i die Dreieckswinkel in den inneren Gitterpunkten P und mit β_k die Dreieckswinkel in den Punkten R des Randpolygons. Die Winkelsumme

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_k = 2\,m\,n\,\pi$$

liefert, wenn wir in den Innenpunkten P

$$\sum_{j=1}^{6} \alpha_j(P) = 2\,\pi - \sigma(P)$$

und in den Randpunkten R

$$\sum \beta_j(R) = \pi - \gamma(R)$$

setzen, die Beziehung

$$2\,\pi\,(n-1)\,(m-1) - \sum \sigma(P) + 2\,(n+m)\,\pi - \sum \gamma(R) = 2\,m\,n\,\pi,$$

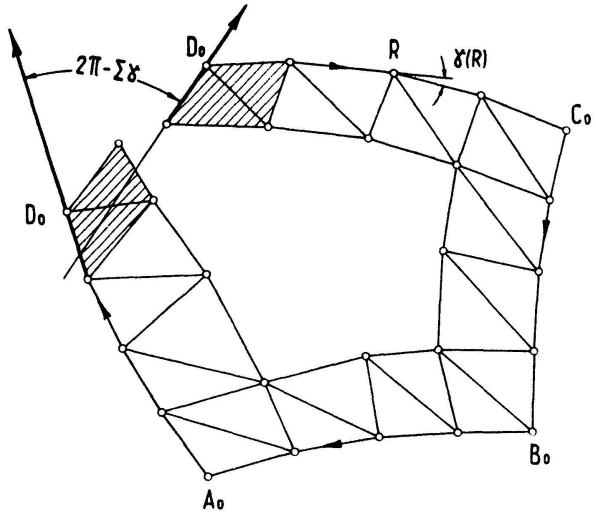
also

$$\sum \sigma(P) + \sum \gamma(R) = 2\,\pi. \tag{6}$$

Hierbei ist $\sum \sigma(P)$ die Summe der Spaltwinkel in den Innenpunkten des Dreiecksgitters (vgl. Figur 1*c*). $\sum \gamma(R)$ ist die Summe der Polygonwinkel des ebenen Polygons, das sich aus dem Randpolygon des Dreiecksgitters dadurch ergibt, dass man

[1]) R. SAUER, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abt. *1928*, 97–104, und *1929*, 307–324; ferner Mh. Math. Phys. *45*, 358–365 (1937).

den Kranz der dem Randpolygon anliegenden Dreiecke in die Ebene ausbreitet (Figur 2); die beiden in Figur 2 schraffierten Dreieckspaare kommen miteinander zur Deckung, wenn man den in die Ebene ausgebreiteten Dreieckskranz wieder auf das Dreiecksgitter im Raum auflegt. Die Winkel $\gamma(R)$ werden positiv gerechnet, wenn bei dem in Figur 2 durch Pfeile gekennzeichneten Fortschreiten auf dem Randpolygon die Polygonseiten sich im Uhrzeigersinn drehen; natürlich müssen auch die Winkel γ in den Punkten A_0, B_0, C_0, D_0 mitgerechnet werden.



Figur 2

2. 2. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Bei dem Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ konvergieren

$$\sum \sigma(P) \to \int\int K(u, v)\, df \quad \text{(curvatura integra)}, \qquad \sum \gamma(R) \to \oint g(s)\, ds; \tag{7}$$

df = Flächenelement, s = Bogenlänge der Randkurve. Beim zweiten Integral sind an etwaigen Knickstellen der Randkurve die Knickwinkel mit einzubeziehen. Solche Knickstellen können beim Grenzübergang nicht nur in den Punkten A_0, B_0, C_0, D_0, sondern auch an anderen Punkten der Randkurve auftreten. Ebenso aber kann sich beim Grenzprozess eine durchweg glatte Randkurve ohne Knickstellen ergeben; in diesem Fall konvergieren die Dreieckswinkel bei A_0 und C_0 und die Dreieckswinkelpaare bei B_0 und D_0 gegen π. Durch Einsetzen der Grenzwerte (7) geht der Summensatz (6) in

$$\int\int K(u, v)\, df + \oint g(s)\, ds = 2\pi, \tag{8}$$

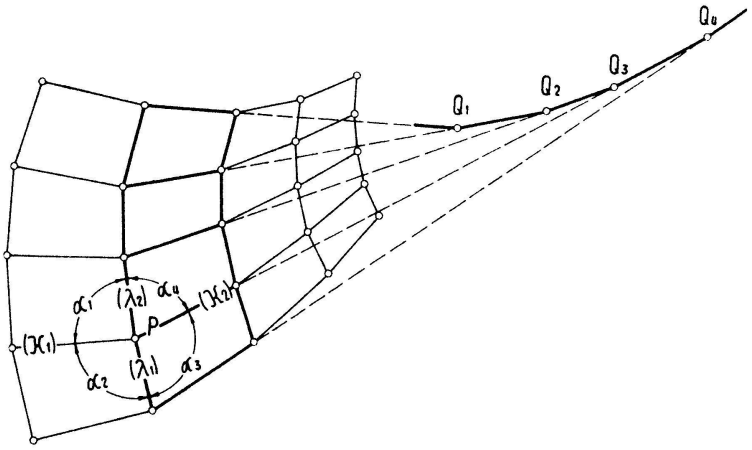
das heisst in den Integralsatz von GAUSS und BONNET über.

§ 3. *Ebenmaschige Vierecksgitter*

3. 1. *Definition.* Wie in Ziffer 1. 1 gehen wir von zwei Scharen von Leitpolygonen aus, setzen jetzt aber voraus, dass diese Leitpolygone ein Vierecksgitter mit ebenen Vierecksmaschen erzeugen (Figur 3*a*). Jeder innere Gitterpunkt P ist dann Scheitel eines Vierkants mit den Seitenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und den Keilwinkeln $\varkappa_1, \varkappa_2, \lambda_1, \lambda_2$.

Die Vierecksseiten, welche die Gitterpunkte zweier benachbarter Leitpolygone verbinden – wir bezeichnen sie kurz als Querseitenfolge –, liegen paarweise in einer Ebene. Die Geraden, in denen diese Vierecksseiten liegen, umhüllen also ein Polygon $Q_1 Q_2 \ldots$. Es kann zu einem eigentlichen oder uneigentlichen Punkt entarten; die Geraden bilden dann eine Pyramide oder ein Prisma.

3. 2. *Verknickungen.* Unter Verknickungen eines Dreiecks- oder Vierecksgitters verstehen wir Deformationen, bei denen die einzelnen Dreiecks- bzw. Vierecksmaschen starr bleiben, jedoch gegeneinander um ihre gemeinsamen Seiten verdreht werden dürfen. Dreiecksgitter lassen im allgemeinen unendlich viele Verknickungen zu,



Figur 3*a*

ebenmaschige Vierecksgitter dagegen sind, wenn sie aus mindestens $3 \cdot 3$ Vierecksmaschen bestehen, im allgemeinen nicht verknickbar. Spezielle ebenmaschige Vierecksgitter, bei denen Verknickungen möglich sind, werden wir in den Paragraphen 4 und 5 besprechen.

3. 3. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Wir betrachten das Sehnen-Vierecksgitter eines Kurvennetzes, das auf der Fläche $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$ von den Parameterkurven

$$u = u_0 \pm n\,\varepsilon, \qquad v = v_0 \pm m\,\varepsilon$$

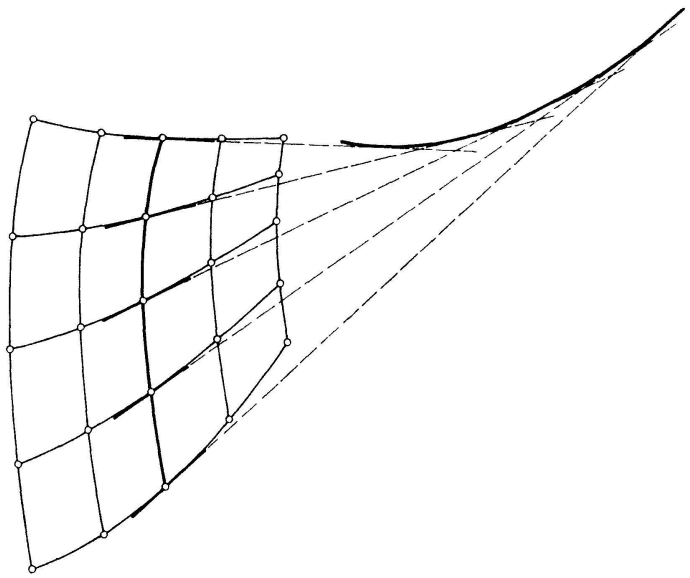
gebildet wird. Die Parameterkurven sind als zueinander konjugiert vorausgesetzt, das heisst, ihre Quertangentenfolgen (Figur 3*b*) erzeugen Torsen (Tangentenflächen von Raumkurven, Kegel- oder Zylinderflächen).

In besonderen Fällen (zum Beispiel bei den in § 4 behandelten konjugierten Kurvennetzen) sind die Sehnenvierecke eines konjugierten Kurvennetzes eben. Der in § 1. 4 eingeführte Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ liefert dann eine Folge ebenmaschiger Vierecksgitter, die gegen das vorliegende konjugierte Kurvennetz konvergieren. Hierbei gehen die Querseitenfolgen des Gitters in die Quertangentenfolgen des Netzes über.

Im allgemeinen jedoch (zum Beispiel in dem in § 5 behandelten Fall) sind die Sehnenvierecke eines konjugierten Netzes nicht eben. Sie werden jedoch beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ in der Ordnung ε^2 eben, während die Sehnenvierecke eines nichtkonjugierten Netzes nur in der Ordnung ε eben werden. Wenn man auch in diesen Fällen das konjugierte Netz als Limes einer Folge ebenmaschiger Vierecksgitter erhalten

will, muss man den Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ etwa in folgender Weise modifizieren: Man konstruiert zum Kurvennetz mit dem Parameterwert ε jeweils dasjenige ebenmaschige Gitter, welches die Sehnenpolygone der Kurven $u = u_0$ und $v = v_0$ als Leitpolygone hat und bei dem auch die Seiten aller übrigen Leitpolygone beider Scharen dieselbe Länge haben wie die entsprechenden Sehnen des Kurvennetzes.

Die ebenmaschigen Vierecksgitter sind hiernach das differenzengeometrische Analogon der konjugierten Kurvennetze auf Flächen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$, den Querseitenfolgen des Gitters, welche Polygone umhüllen, entsprechen die Quertangentenfolgen des Kurvennetzes, welche Kurven umhüllen.



Figur 3*b*

Den Verknickungen der Dreiecks- und ebenmaschigen Vierecksgitter entsprechen beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ Verbiegungen der Flächen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v)$. Insbesondere entsprechen den Verknickungen der ebenmaschigen Vierecksgitter solche Verbiegungen, bei denen das (u, v)-Kurvennetz konjugiert bleibt. Ebenso wie ein ebenmaschiges Vierecksnetz im allgemeinen nicht verknickbar ist, lässt sich eine Fläche im allgemeinen nicht derart verbiegen, dass ein auf der Fläche vorgegebenes konjugiertes Kurvennetz konjugiert bleibt.

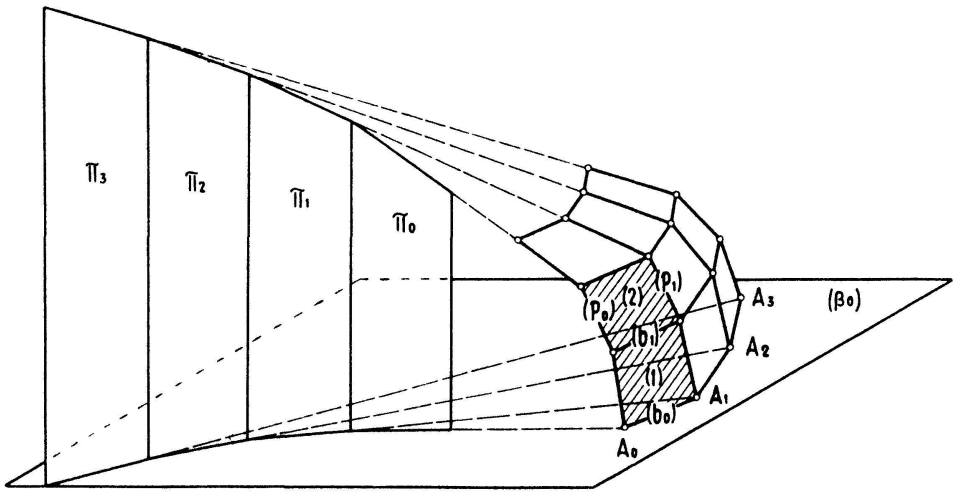
§ 4. *Verbiegung der Dreh-, Gesims- und Affinflächen*

4. 1. *Definition der Trapezgitter*[1]). Wir wenden uns nun zu speziellen ebenmaschigen Vierecksgittern, den sogenannten Trapezgittern. Sie werden folgendermassen definiert (Figur 4):

Vorgegeben seien in zwei zueinander senkrechten Ebenen (β_0) und (π_0) zwei Polygone b_0 und p_0 mit der gemeinsamen Ecke A_0, ausserdem eine Folge weiterer zu (β_0) senkrechter Ebenen (π_1), (π_2), ..., welche die Ecken A_1, A_2, ... des Polygons b_0 enthalten. Alsdann wird das Polygon p_0 durch Parallele zu A_0A_1 in die Ebene (π_1) projiziert; das hierbei in (π_1) entstandene Polygon p_1 wird ebenso durch Parallele zu

[1]) R. SAUER und H. GRAF, Math. Ann. *105*, 512–527 (1931).

A_1A_2 in die Ebene (π_2) projiziert und so fort. Das auf diese Weise erzeugte Trapezgitter hat als Leitpolygone die zueinander affinen «Profilpolygone» $p_0, p_1, p_2, \ldots$ in den zu (β_0) senkrechten Ebenen $(\pi_0), (\pi_1), (\pi_2), \ldots$ und die in (β_0) und zu (β_0) parallelen Ebenen $(\beta_1), (\beta_2), \ldots$ liegenden «Bahnpolygone» $b_0, b_1, b_2, \ldots$, deren Seiten zueinander parallel sind. Die Ebenen $(\pi_0), (\pi_1), (\pi_2), \ldots$ umhüllen das «Leitprisma» des Trapezgitters.



Figur 4

4. 2. *Klassifikation der Trapezgitter.* Je nach Vorgabe des Bahnpolygons b_0 und des Leitprismas ergeben sich folgende Fälle (Figur 5):

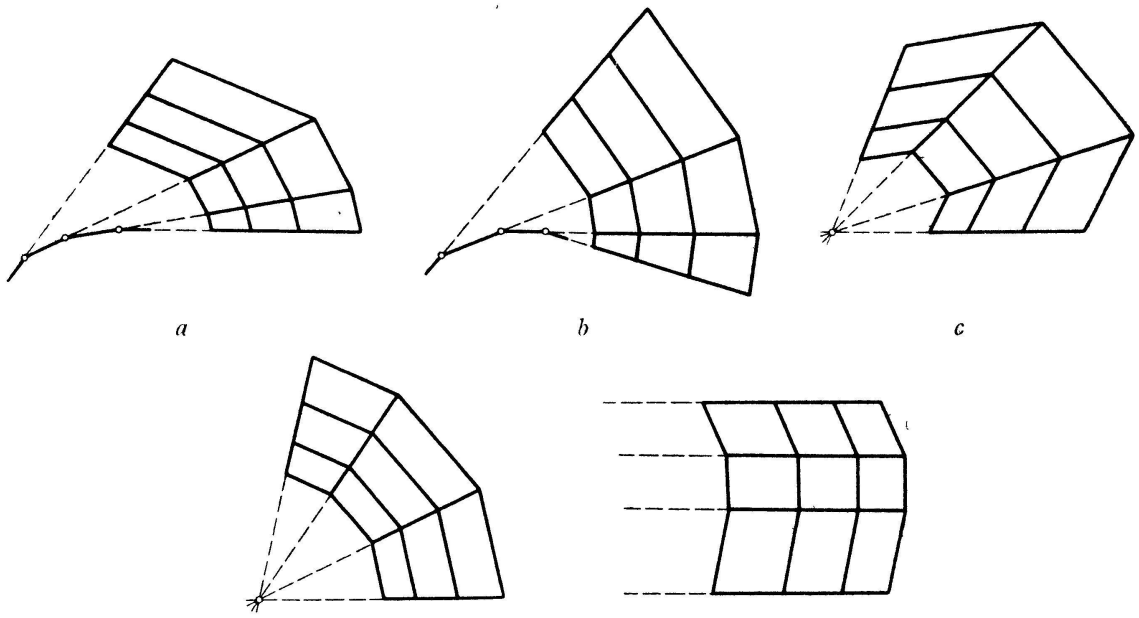
(a)	Leitprisma nicht entartet	Trapeze nicht gleichschenklig,
(b)		Trapeze gleichschenklig;
(c)	Leitprisma entartet in eine eigentliche Gerade (Leitachse)	Trapeze nicht gleichschenklig,
(d)		Trapeze gleichschenklig;
(e)	Leitprisma entartet in eine uneigentliche Gerade; Trapeze zu Parallelogrammen spezialisiert.	

Die Grundrisse sind in Figur 5 dargestellt. Bei (b) und (d) sind die Profilpolygone kongruent; bei (d) gehen sie durch Drehung um die Leitachse, bei (b) durch Abrollen der Profilebene am Leitprisma auseinander hervor. Bei (e) sind die Leitpolygone jeder der beiden Scharen kongruent und gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor.

4. 3. *Verknickung der Trapezgitter.* Die in Ziffer 4. 1 definierten Trapezgitter sind nicht starr, sondern lassen eine einparametrige Gruppe von Verknickungen zu. Bei diesen Verknickungen entstehen aus den Trapezgittern der Klassen (a) bis (e) von Ziffer 4. 2 immer wieder Trapezgitter derselben Klasse.

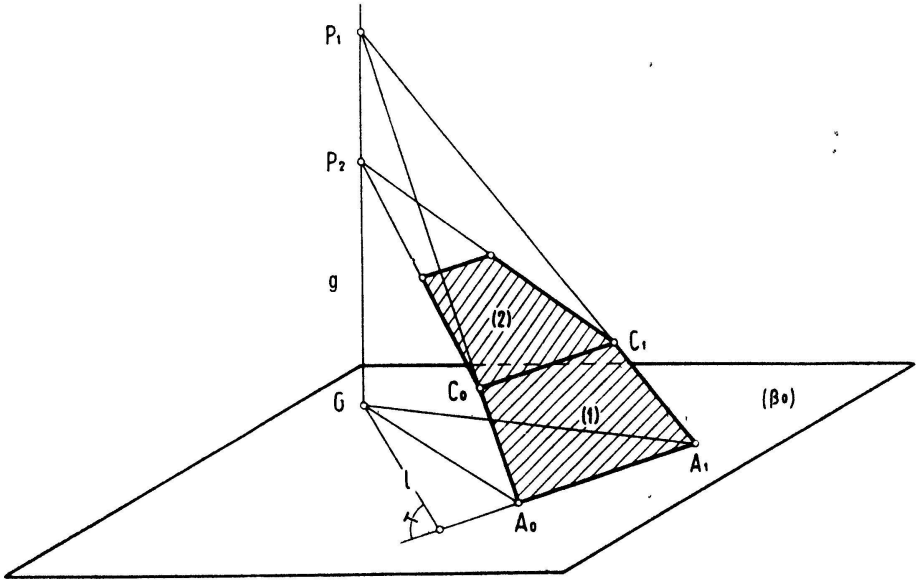
Die Verknickungen ergeben sich folgendermassen (Figur 6): In Figur 6 sind die beiden in Figur 4 schraffierten Trapeze (1), (2) nochmals dargestellt; die Trapezschenkel sind bis zu ihren Schnittpunkten P_1, P_2 auf der Geraden g, in der sich die Ebenen (π_0), (π_1) schneiden, verlängert. Dreht man das Trapez (1) um die Seite A_0A_1, dann verlagert sich der Punkt P_1, wobei sein Grundriss G auf einem Lot l zu A_0A_1

wandert. Man verschiebt hierauf das Trapez (2) so, dass es mit der Seite C_0C_1 wieder an das Trapez (1) stösst. Hernach dreht man das Trapez (2) um die Seite C_0C_1, bis der Schnittpunkt P_2 seiner Schenkel, dessen Grundriss G sich auf dem nämlichen



Figur 5

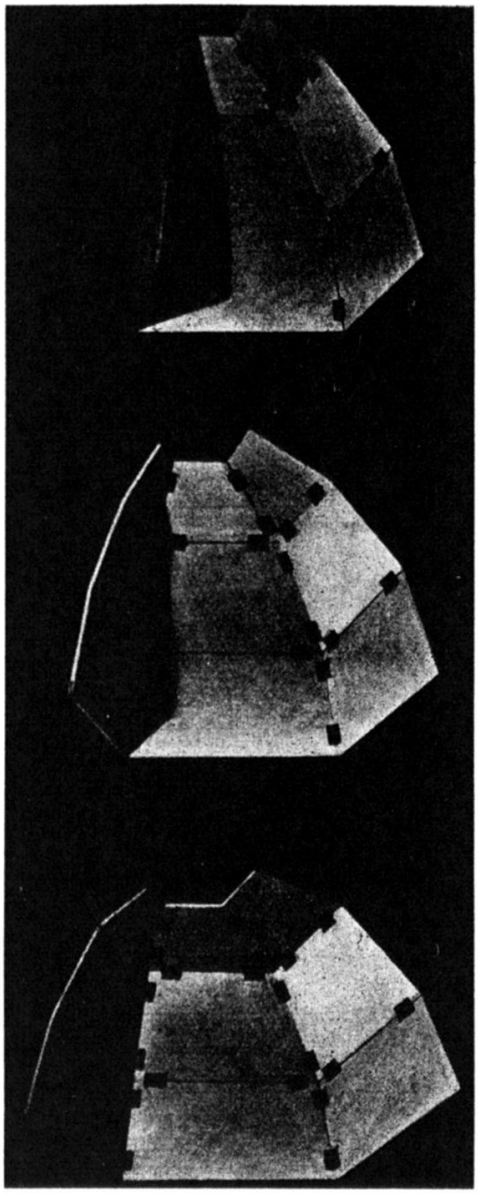
Lot l zu A_0A_1 bewegt, wiederum mit dem Grundriss G des Punktes P_1 zusammenfällt. Bei Forderung stetiger Verknickungen und Beschränkung auf nicht zu grosse Verdrehungswinkel des Trapezes (1) ist durch die Verdrehung des Trapezes (1) die



Figur 6

Verdrehung des Trapezes (2) und die Verdrehung der übrigen Trapeze des Gitters eindeutig festgelegt. Die Verknickungen bilden also in der Tat eine einparametrige Menge mit dem Verdrehungswinkel des Trapezes (1) als Parameter.

Die Verknickung kann so weit getrieben werden, bis entweder die Trapeze zwischen einem Paar benachbarter Profilpolygone oder die Trapeze zwischen einem Paar benachbarter Bahnpolygone in eine gemeinsame Ebene fallen. Figur 7 zeigt das Modell eines Trapezgitters in diesen beiden Grenzformen der Verknickung und einer Zwischenform.



Figur 7 [1])

4. 4. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ gehen die Trapezgitter (a) bis (e) der in Ziffer 4. 2 vorgenommenen Klassifikation in folgende Flächen über:

(a) Gesimsaffine Flächen: Sie werden erzeugt von einer Schar zueinander affiner Profilkurven, welche in den Tangentenebenen eines Leitzylinders liegen, und einer Schar von Bahnkurven in Ebenen senkrecht zum Leitzylinder.

(b) Gesimsflächen: Die Bahnkurven sind Orthogonaltrajektorien der Tangentenebenen des Leitzylinders. Die Profilkurven sind infolgedessen kongruent und gehen beim Abrollen der Profilebene am Leitzylinder auseinander hervor.

(c) Achsenaffine Flächen: Der Leitzylinder entartet zu einer eigentlichen Geraden (Leitachse). Die Profilkurven sind zueinander affin mit der Leitachse als Affinitätsachse, die Bahnkurven sind zueinander ähnlich mit dem Ähnlichkeitszentrum auf der Leitachse.

(d) Drehflächen: Der Leitzylinder entartet zu einer eigentlichen Geraden (Drehachse). Die Profilkurven sind kongruent und gehen durch Drehung um die Leitachse auseinander hervor; die Bahnkurven sind koaxiale Kreise.

(e) Translationsflächen: Der Leitzylinder entartet zu einer uneigentlichen Geraden. Die Leitkurven liegen in zwei zueinander senkrechten Parallelebenenscharen. Die Leitkurven jeder der beiden Scharen sind kongruent und gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor.

Die Profilkurven und Bahnkurven bilden in jedem der Fälle (a) bis (e) ein konjugiertes Kurvennetz. Der einparametrigen Gruppe der Verknickungen der Trapezgitter entspricht eine einparametrige Gruppe von Verbiegungen der Flächen (a) bis (e) in Flächen derselben Klasse, wobei die Profil- und Bahnkurven ihre Eigenschaft beibehalten und konjugiert bleiben[2]).

---

[1]) Diese Figur ist mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlages der Arbeit von R. SAUER und H. GRAF, Math. Ann. *105*, 522 (1931), entnommen.

[2]) Vgl. hierzu *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III D 6a, Nr. 26, 24, 23; ferner K. PETERSON, *Über Kurven und Flächen* (Leipzig und Moskau 1868); P. STÖCKEL, Math. Ann. *49*, 255–310 (1897); und M. LAGALLY, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abt., *49*, 369–379 (1919).

Den in Figur 7 dargestellten Grenzformen der Verknickungen entsprechen bei den Flächen (a) bis (e) Grenzformen der Verbiegungen, bei denen die Fläche entweder längs einer Profilkurve oder längs einer Bahnkurve eine gemeinsame Tangentenebene besitzt. (Fortsetzung folgt.)

R. SAUER, München.

Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung des Delischen Problems

Zu der bekanntermassen mit Zirkel und Lineal unlösbaren Aufgabe der Würfelverdopplung (Delisches Problem) ist es eine sinnvolle Verallgemeinerung, drei Würfel zu konstruieren, von denen zwei zusammen so gross sind wie der dritte. Ich will nun dazu einige besonders einfach zu zeichnende Lösungen angeben.

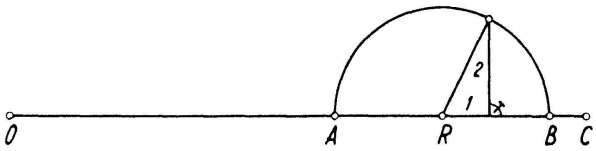
Da eine (nicht aufgehende) Kubikwurzel keine konstruierbare Grösse ist, ist die Aufgabe nur in dieser weiteren Form zu stellen und nicht etwa so, dass zu zwei gegebenen Würfeln der dritte mit der Summe (oder Differenz) der Inhalte verlangt wird. Es muss also zwischen drei *konstruierbaren*, das heisst lediglich mit Hilfe von Quadratwurzeln gebildeten Grössen a, b, c die Beziehung $a^3+b^3=c^3$ bestehen; und die Aufgabe besteht nun darin, solche Tripel zu finden.

Bei dem nächstliegenden Versuch der Lösung in rationalen Zahlen (also die Würfelseiten in einem passenden ganzzahligen Verhältnis) greift nun eine andere Unmöglichkeit ein; nämlich die des grossen Fermatschen Satzes für den Exponenten 3, wonach die Gleichung $a^3+b^3=c^3$ in ganzen Zahlen unlösbar ist. Wir müssen also für a, b, c Zahlen aus irgendeinem reellen konstruierbaren Zahlkörper nehmen.

Die einfachsten solchen Körper sind nun die quadratischen $K(\sqrt{m})$, und unter ihnen wieder solche mit möglichst kleiner Grundzahl m. In diesen Körpern ist nun die kubische Fermat-Gleichung lösbar für $m = 2, 5, 6$ und andere, jedoch unlösbar für $m = 3, 7, 10$ und andere. Eine besonders einfache Lösung gibt es bei $m = 5$:

$$(9+\sqrt{5})^3+(9-\sqrt{5})^3=12^3$$

mit folgender geometrischer Konstruktion:



Figur 1

Da $\sqrt{5}$ die Hypotenuse zu den Katheten 1 und 2 ist, liefern mit $OR = 9$ die Strecken OA, OB, $OC = 12$ die drei passenden Würfelseiten.

Eine ganz analoge Konstruktion liefert die Gleichung $(12+\sqrt{33})^3+(12-\sqrt{33})^3=18^3$, wobei $\sqrt{33}$ die eine Kathete zur Hypotenuse 7 und der anderen Kathete 4 ist. Ich erwähne ferner noch:

$$42^3+(17\sqrt{2}-18)^3=(17\sqrt{2}+18)^3, \qquad 8^3+(\sqrt{85}-1)^3=(\sqrt{85}+1)^3,$$

$$18^3+(5\sqrt{6}-6)^3=(5\sqrt{6}+6)^3, \qquad 10^3+(\sqrt{82}-2)^3=(\sqrt{82}+2)^3,$$

wobei $\sqrt{85}$ Hypotenuse zu 2 und 9 oder zu 6 und 7, $\sqrt{82}$ Hypotenuse zu 1 und 9 ist.

Solche Beispiele lassen sich beliebig viele herleiten. Nach der Identität

$$[3x^2+\sqrt{-3(x^4+4xy^3)}]^3+[3x^2-\sqrt{-3(x^4+4xy^3)}]^3=(-6xy)^3,$$