Über die Evolutoiden der Ellipse

Autor(en): **Wunderlich, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18074

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

conques, par exemple (67890), (67823), (78945), (89012), (90634), (06751), et déterminons les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_5$ définis en 10 (Figure 8). Si $P(i\,j\,k\,l\,m)$ désigne le polyèdre de sommet S, de base π, formé par les plans i, j, k, l, m, le polyèdre

$$P \sim a_0 P(67890) + a_1 P(67823) + a_2 P(78945) + a_3 P(89012) + a_4 P(90634) + a_5 P(06751)$$

jouit de propriétés remarquables au point de vue de l'équivalence des polyèdres. Les dièdres d'arêtes obliques sont tous droits. Les arêtes horizontales ont une longueur algébrique nulle, c'est-à-dire que la longueur des arêtes qui portent un dièdre α est égale à la longueur des arêtes qui portent un dièdre $\pi - \alpha$. Ce polyèdre vérifie ainsi les conditions de DEHN pour l'équivalence de façon presque triviale. Nous pouvons montrer d'autre part que tout polyèdre qui vérifie ces conditions est réductible à un polyèdre n'ayant que des dièdres droits et des sommets d'où ne partent que 5 arêtes au plus. Le polyèdre P est l'exemple le plus simple d'un polyèdre vérifiant les conditions de DEHN et présentant les caractères les plus généraux qu'il faille considérer. A cause de la liberté du choix des plans 5,2 et 0, il vérifie même toutes les conditions nécessaires et suffisantes qui nous soient connues. Par contre, nous ne savons pas si P est effectivement équivalent à un cube. Ce polyèdre résume donc en quelque sorte l'état actuel de la recherche de l'équivalence des polyèdres. Si l'on peut montrer qu'il est équivalent à un cube, on trouvera peut-être la démonstration du cas général. S'il ne l'est pas, on établira de nouvelles conditions nécessaires qui seront probablement aussi suffisantes. Tel est le problème. J.-P. SYDLER, Zurich.

Über die Evolutoiden der Ellipse

Verdreht man in der Ebene sämtliche Tangenten einer gegebenen Kurve k um ihre Berührungspunkte um den gleichen Winkel α, so erhält man im Hüllgebilde der Neulagen für $\alpha = \pi/2$ die *Evolute*, für $\alpha \neq \pi/2$ eine «*Evolutoide*» von k. Für die durch kontinuierliches Anwachsen des Drehwinkels α von 0 bis π über die Evolutoiden als Zwischenstadien bewirkte Umorientierung einer Kurve k hat L. LOCHER-ERNST kürzlich das Beispiel der *Ellipse* herangezogen[1]). Deren am angeführten Ort durch hübsche Figuren wiedergegebene Evolutoiden erwecken den Eindruck, *zwei schiefe Symmetrien* zu besitzen. Da es sich dabei keineswegs um eine einfache Folge der Symmetrieeigenschaften der Ausgangskurve handeln kann, soll diese Vermutung hier auf analytischem Wege nachgeprüft werden; es wird sich dabei auch ein bisher anscheinend nicht bemerkter Zusammenhang der Ellipsenevolutoiden mit einer sehr bekannten Kurvenfamilie ergeben.

Wir gehen von der üblichen Parameterdarstellung der Ellipse in kartesischen Normalkoordinaten aus:

$$x = a \cos \omega, \quad y = b \sin \omega. \tag{1}$$

[1]) L. LOCHER-ERNST, *Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute.* El. Math. *8*, 73–75 (1953).

Bezeichnet τ den Tangentenwinkel gegen die x-Achse, so gelangt man zu der um α verdrehten Lage der Tangente durch den Ansatz

$$\frac{y - b \sin \omega}{x - a \cos \omega} = \operatorname{tg}(\tau + \alpha) \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \omega}{a \sin \omega}.$$

Auswertung führt unter Verwendung der Abkürzungen $\cos\alpha = \lambda$, $\sin\alpha = \mu$ auf die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} &(a \mu \sin \omega - b \lambda \cos \omega)\, x - (a \lambda \sin \omega + b \mu \cos \omega)\, y \\ &\quad = (a^2 - b^2)\, \mu \sin \omega \cos \omega - a\, b\, \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es liegt nahe, vermöge

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = -\mu x + \lambda y \tag{3}$$

eine *Drehung des Koordinatensystems* um den Winkel α vorzunehmen und zur weiteren Vereinfachung die *affine Streckung*

$$x^* = x', \quad y^* = \frac{a}{b} y' \tag{4}$$

anzuschliessen. Die Evolutoide l wird dabei in eine Kurve l^* transformiert, die durch die Tangentengleichung

$$x^* \cos \omega + y^* \sin \omega = p - q \sin \omega \cos \omega, \tag{5}$$

mit

$$p = \lambda a, \quad q = \frac{\mu (a^2 - b^2)}{b}$$

beschrieben wird. Der Vollständigkeit halber sei auch ihre Punktgleichung angeführt, die sich aus (5) und der Ableitung nach ω leicht berechnen lässt:

$$x^* = p \cos \omega - q \sin^3 \omega, \quad y^* = p \sin \omega - q \cos^3 \omega. \tag{6}$$

Durch Rückkehr über die Transformationen (4) und (3) gelangt man zu einer einfachen Parameterdarstellung der Ellipsenevolutoide selbst.

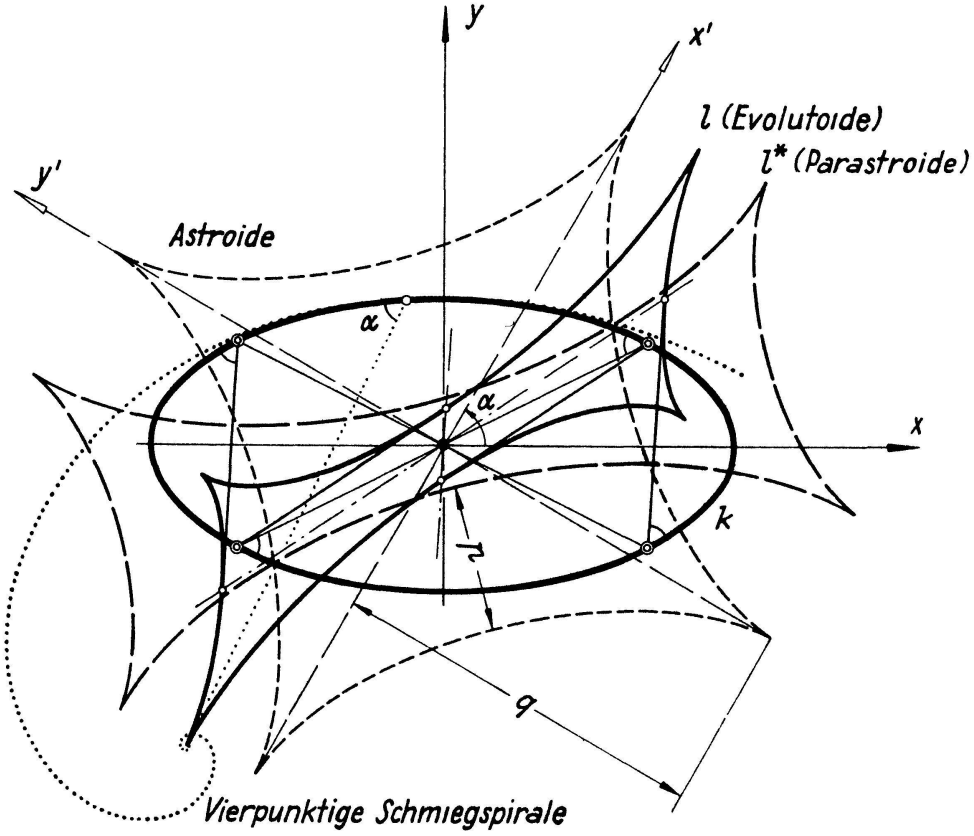
Zur Klärung der aufgeworfenen Frage nach den Symmetrien genügt aber bereits die Tangentengleichung (5). Vertauschung von ω mit $\pm \pi/2 - \omega$ lässt nämlich sofort erkennen, dass die Kurve l^* *spiegelsymmetrisch* bezüglich der Geraden $y^* = \pm x^*$ ist. Hieraus folgt nun sofort die vermutete Symmetrie der Evolutoide l: Ihre Symmetrieachsen $a(-\mu x + \lambda y) = \pm b(\lambda x + \mu y)$ gehen durch Drehung um den Winkel α aus den beiden konjugierten Ellipsendurchmessern $a y = \pm b x$ hervor, welche die Punkte $\omega = \pm \pi/4$ und $\pm 3\pi/4$ tragen und durch Längengleichheit gekennzeichnet sind. Die zu diesen Punkten gehörigen Evolutoidentangenten sind parallel zu den Symmetrieachsen und berühren die Evolutoide in ihren auf diesen Achsen gelegenen « Scheiteln » (vgl. Figur 1). Symmetrische Tangenten und damit Punkte der Evolutoide stammen von solchen Punktepaaren der Ellipse, deren Verbindungssehne parallel zu einem der konjugierten Durchmesser gleicher Länge verläuft.

Die Bauart der Tangentengleichung (5) lässt es angezeigt erscheinen, zu *polaren Speerkoordinaten* überzugehen, die eine (orientierte) Gerade durch ihren (vorzeichen-

begabten) Ursprungsabstand h und dessen Richtungswinkel ω festlegen. Die Gleichung der Kurve l^* schreibt sich dann

$$h = p - q \sin\omega \cos\omega \tag{7}$$

und lässt in dieser einfachen Gestalt unmittelbar erkennen, dass l^* eine im Abstand p verlaufende *Parallelkurve* der *Astroide* $\bar{h} = -q \sin\omega \cos\omega$ ist, die als Hüllkurve einer Strecke von der Länge q aufgefasst werden kann, deren Endpunkte auf den



Figur 1. Ellipsenevolutoide und dazu affine Parastroide ($a:b = 2:1$, $\alpha = \pi/3$)

Koordinatenachsen x', y' gleiten. Als Parallelkurve einer Hypozykloide ist die wohlbekannte «Parastroide»[1]) eine Radlinie 3. Stufe[2]). *Die Evolutoiden der Ellipse sind mithin affine Parastroiden,* als solche rationale Kurven 4. Klasse und 6. Ordnung und im übrigen Radlinien 4. Stufe.

Die *vier Spitzen* der Parastroide l^* – und damit jene der Ellipsenevolutoide l – ergeben sich durch Nullsetzen des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = h + h'' = p + 3\,q \sin\omega \cos\omega$$

für

$$\sin 2\,\omega = -\frac{2\,p}{3\,q} = -\frac{2\,a\,b \operatorname{ctg}\alpha}{3\,(a^2 - b^2)}\,. \tag{8}$$

[1]) H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Sammlg. Schubert *56*, Leipzig 1908), 110ff. und 301.

[2]) W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien.* Österr. Ing.-Archiv *1*, 277–296 (1946). «Radlinie n-ter Stufe» wird die Bahnkurve des Endpunktes eines n-gliedrigen, gelenkigen Polygonzuges genannt, dessen Anfangspunkt fest ist und dessen einzelne (starre) Seiten mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten rotieren.

Während jeder gewöhnliche Evolutoidenpunkt als Zentrum einer *logarithmischen Krümmungsspirale* vom Schnittwinkel $-\alpha$ angesehen werden kann, welche die Grundkurve k dreipunktig berührt, ist jede Evolutoidenspitze Zentrum einer vierpunktig berührenden Spirale. Rücken schliesslich zwei Spitzen zusammen (zu einem dreifachen Punkt mit vereinigten Tangenten), so wird die Schmiegspirale sogar eine fünfpunktig berührende: Im vorliegenden Fall kann dies aus Symmetriegründen nur für $\omega = \pm\pi/4$ und $\pm 3\pi/4$ eintreten, also gemäss (8) für $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2\,a\,b/3\,(a^2 - b^2)$. Auf diese Weise ergibt sich übrigens eine direkte Lösung der seinerzeit von R. BEREIS gestellten Aufgabe, jene logarithmischen Spiralen zu finden, die eine vorgelegte Ellipse zum (fünfpunktig berührenden) Schmiegkegelschnitt haben[1]).

Abschliessend sei erwähnt, dass sich für die Evolutoiden der *Parabel* rationale Kurven 3. Klasse und 3. Ordnung ergeben, nämlich *affine semikubische Parabeln.*

W. WUNDERLICH, Wien.

Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke[2])

Man kann das Verfahren der schiefen Axonometrie als das Auftragen von Koordinaten in einem frei gewählten ebenen Dreibein erklären. Dann folgt planimetrisch, dass eine allgemeine ebene Figur affin verzerrt erscheint. Alle Lagenbeziehungen, ebenso jene Massbeziehungen, in denen die Länge der räumlichen Einheitsstrecke nicht benötigt wird, lassen sich konstruktiv behandeln, ohne dass man die Eigenschaft benützt, dass das schiefaxonometrische Bild ein Schrägriss (eine Parallelprojektion) ist. Diese Eigenschaft wird bekanntlich im Satz von POHLKE ausgedrückt. Für diesen Satz und die Konstruktion des Kugelumrisses, der Sehstrahlrichtung und des räumlichen Dreibeins wird hier eine elementare Herleitung gegeben. Es werden zwei Hilfssätze verwendet:

1. Jedes frontalaxonometrische Bild ist ein Schrägriss. Ist ein ebenes Dreibein $U_0A_0B_0C_0$ mit $\overline{U_0B_0} = \overline{U_0C_0}$ und $\sphericalangle B_0U_0C_0 = 90°$ gegeben, so kann ein räumliches Dreibein $UABC$ und eine Sehstrahlrichtung s sofort angegeben werden: $U = U_0$, $B = B_0$, $C = C_0$; UA steht auf der Bildebene normal und hat die Länge $\overline{U_0B_0}$; s ist die Richtung von A nach A_0.

2. In der Ebene π seien im Innern eines Kreises c mit der Mitte U die Punkte P und Q gegeben. γ sei die Kugel um U durch c. Die Normalen zu π durch P und Q mögen γ in P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 schneiden. Die Grosskreise von γ durch P_1, Q_1 bzw. P_2, Q_2 erscheinen im Normalriss auf π als eine Ellipse durch P und Q, die c in diametralen Punkten berührt. Die Grosskreise durch P_1, Q_2 bzw. P_2, Q_1 erscheinen ebenfalls als eine solche Ellipse. Bei der einen Ellipse werden P und Q durch die Berührungspunkte mit c getrennt, bei der anderen nicht. Umgekehrt kann man jede Ellipse, die c von innen in diametralen Punkten berührt, als Normalriss zweier symmetrisch zu π liegenden reellen Grosskreise von γ auffassen. Übt man auf c, P, Q noch eine Affinität aus, so folgt:

---

[1]) Aufgabe 159, El. Math. 7, 92 (1952); Auflösung ebenda 8, 91 (1953).

[2]) Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).