Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 5: **Zum 60.Geburtstag von Rolf Nevanlinna**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Über eine unstetige Funktion $f(x, y)$

Es sei $\mathfrak{x} \sim (x, y)$ und $f(\mathfrak{x}) \sim f(x, y)$.

Dann haben wir formal wie im Eindimensionalen die

Definition: $f(\mathfrak{x})$ heisst stetig in einem Punkt $\mathfrak{x}_0$, wenn $f(\mathfrak{x})$ in einer Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ definiert ist und wenn gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{x}_\nu) = f(\mathfrak{x}_0)$$

für *alle* gegen $\mathfrak{x}_0$ konvergente Folgen $\{\mathfrak{x}_\nu\}$.

Die Unstetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2} \tag{1}$$

(Plückersches Konoid) im Nullpunkt kann man bekanntlich also dadurch zeigen, dass man etwa zwei konvergente Punktfolgen $\{\mathfrak{x}_\nu\} \sim \{(x_\nu, y_\nu)\}$ auswählt, deren zugehörige Folgen $f(\mathfrak{x}_\nu)$ im Punkte $(0, 0)$ verschiedene Grenzwerte haben.

Zunächst ist es sinnvoll, an der Stelle $(0, 0)$ der Funktion (1) den Wert 0 zuzuordnen, denn (1) hat längs der beiden Koordinatenachsen die Werte

$$\left.\begin{aligned} f(0, y) &= 0\,, \\ f(x, 0) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Unstetigkeit im Punkt $(0, 0)$ erkennen wir nun so: Wir wählen etwa eine Punktfolge auf der x-Achse ($y = 0$), das heisst

$$\{\mathfrak{x}_\nu\} \sim \{(x_\nu, 0)\}$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} x_\nu = 0\,.$$

Dann ist

$$\lim_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{x}_\nu) = 0\,. \tag{3}$$

Andererseits betrachten wir eine Punktfolge auf der Geraden

$$y = a\,x \qquad (\text{mit } a \neq 0)\,,$$

also

$$\{\mathfrak{x}_\nu\} \sim \{(x_\nu, a\,x_\nu)\}$$

mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{x}_\nu = (0, 0)\,.$$

Dann gehört dazu

$$\lim_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{x}_\nu) = \frac{a}{1 + a^2} \neq 0\,. \tag{4}$$

Nach unserer Definition ist nun möglich, dass es auch Funktionen $g(x, y)$ geben kann, bei denen *alle längs der Geraden*

$$y = \alpha\,x \qquad (\alpha \text{ beliebig})$$

genommenen Punktfolgen $\{\mathfrak{x}_\nu\}$ mit

$$\lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{x}_\nu = (0, 0)$$

zugehörige Grenzwerte

$$\lim_{\nu \to \infty} g(\mathfrak{x}_\nu) = g(0, 0) \tag{5}$$

haben können, so dass also im Nullpunkt Stetigkeit vermutet werden könnte. Trotzdem aber kann es dann gewisse Kurven geben, längs deren die darauf liegenden Punktfolgen $\{\mathfrak{x}_\nu\}$, wieder mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{x}_\nu = (0, 0),$$

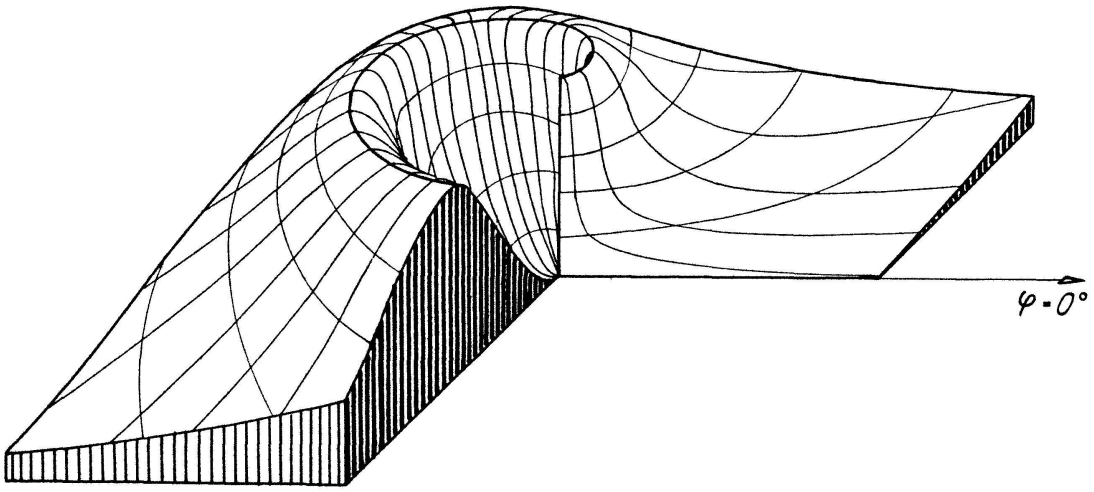
einen Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} g(\mathfrak{x}_\nu) \neq g(0, 0) \tag{6}$$

zur Folge haben, womit also per definitionem diese Funktionen

$$g(\mathfrak{x}) \sim g(x, y)$$

im Nullpunkt als unstetig erkannt sind.



Figur 1

Es ist nun interessant, dass man das Beispiel einer solchen Funktion leicht erhält, indem man in der Gleichung (1) an Stelle der kartesischen Koordinaten x, y, z direkt die Zylinderkoordinaten r, φ, z schreibt. Man erhält so die Funktion

$$z = g(r, \varphi) = \frac{r\varphi}{r^2 + \varphi^2}. \tag{7}$$

Dabei wird man wieder sinnvoll $g(0, 0) = 0$ definieren sowie verlangen müssen (um eine eindeutige Funktion zu erhalten)

$$0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Den Geraden

$$y = \alpha x$$

entsprechen dabei die Radialstrahlen $\varphi = c = \text{const}$.

Haben wir also darauf Punktfolgen $\{\mathfrak{x}_\nu\} \sim \{(r_\nu, c)\}$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty} r_\nu = 0,$$

so gilt dort für (7)

$$\lim_{\nu\to\infty} g(\mathfrak{x}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{r_\nu c}{r_\nu^2 + c^2} = 0. \tag{8}$$

Bewegen wir uns aber etwa auf einer *archimedischen Spirale* gegen den Nullpunkt,

$$r = \varphi,$$

so wird für die Punktfolge

$$\{\mathfrak{x}_\nu\} \sim \{(\varphi_\nu, \varphi_\nu)\}$$

mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu = 0$$

der zugehörige Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} g(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} g(\varphi_\nu, \varphi) = \frac{1}{2} \neq 0. \tag{9}$$

Übrigens lautet die Gleichung (7) in kartesischen Koordinaten unter Beibehaltung des dort Gesagten

$$z = g(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\operatorname{arc\,tg}\, y/x}{x^2+y^2+(\operatorname{arc\,tg}\, y/x)^2}. \tag{10}$$

Figur 1 zeigt im Ausschnitt die «analytische Landschaft» dieser Funktion in skizzenhafter axonometrischer Darstellung. HANS WAGNER, Karlsruhe.

Ungelöste Probleme

Nr. 7. Wir fragen uns: Gibt es einen Satz der ebenen kombinatorischen Geometrie, der wie folgt lautet: Werden je k Kreisbereiche einer endlichen Menge sich gegenseitig nicht überdeckender kongruenter Kreise der Ebene durch eine geeignete Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreisbereiche der Menge trifft? Welchen Wert hat die Stichzahl k, wenn ein derartiger Satz überhaupt existiert?

Man kann leicht einsehen, dass jedenfalls $k \geqq 5$ sein müsste. In der Tat: Betrachtet man die Menge der 5 Kreise, deren Mittelpunkte die Ecken eines regulären Fünfecks bilden und deren Radien gleich der halben Fünfeckseite sind, so weisen je 4 Kreise eine gemeinsame Sekante auf, während dies für alle 5 Kreise nicht der Fall ist.

Hat die Kreismenge die zusätzliche Eigenschaft, dass eine separierende Richtung in der Ebene so vorhanden ist, dass jede parallele Gerade höchstens einen Kreis der Menge trifft, so gilt die Aussage bereits mit $k = 3$. In diesem Fall können die Kreise übrigens durch Eibereiche beliebiger Form und Grösse ersetzt werden. Dies ist eine Verschärfung eines Resultats von P. VINCENSINI[1]), welche von V. L. KLEE jr. stammt[2]).

H. HADWIGER.

Nachtrag zu Nr. 6. Herr H. LENZ (München) teilte uns mit, dass die im letzten Absatz angegebene vermutete Schätzung $N_k(n) < n\,(k+1)/2$ unrichtig ist. Ein von ihm konstruiertes Beispiel zeigt, dass jedenfalls $N_k(n) \geqq (k-1)\,n - (k+1)\,(k-2)/2$ für $n > k$ gelten muss; für $k > 3$ und grosse n resultiert die Unrichtigkeit der Vermutung.

Aufgaben

Aufgabe 216. Gegeben sind zwei windschiefe Strecken AB und CD. Man konstruiere zwei berührend aneinanderschliessende Kreisbogen vom gleichen Radius, von denen der eine AB in A, der andere CD in C berührt. J. STROMMER, Budapest.

Lösung: Die beiden sich berührenden Kreise k_1 und k_2 liegen auf der Kugel K, die AB in A und CD in C berührt. Das Zentrum M von K ergibt sich, indem man die Schnitt-

---

[1]) Atti del Quarto Congresso dell'Unione Mat. Ital. *1951*, II, 454–464.

[2]) *Common Secants for Plane Convex Sets*, Proc. Amer. Math. Soc. *5*, 639–641 (1954).