Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

nicht vergrössern kann und damit mindestens so gross ist wie das Kolmogoroffsche Minimalmass. Darüber kann man nachlesen bei M. KNESER in einer jüngst erschienenen Abhandlung[1]).

Die vermutete Aussage ist nur in einigen Sonderfällen bewiesen worden. 1. $k = 1$ (Beweis durch Induktion nach n). 2. $n \leqq k + 1$. 3. Die Menge der P_i ist ähnlich zur Menge der Q_i [Beweis von G. BOULIGAND[2])]. 4. $k = 2$; die Menge der P_i lässt sich stetig in die Menge der Q_i so überführen, dass die Distanzen entsprechender Punkte nie abnehmen (nach brieflicher Mitteilung von W. HABICHT an M. KNESER).

H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 232. Eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts schneide zwei feste Tangenten desselben in A und B. Über AB wird das Dreieck ABC errichtet, das zu einem festen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist. Gesucht wird der geometrische Ort für die Spitze C. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht, und J. P. SYDLER, Zürich.

Lösung: Die Ordnung der Ortskurve ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in allgemeiner Lage. Es sei g eine solche und C ein Punkt auf ihr. Das Dreieck ABC, dessen Eckpunkte A und B auf den Tangenten t_1 bzw. t_2 des Kegelschnittes K liegen und das dem gegebenen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist, ist durch C eindeutig bestimmt. Denn die Drehstreckung aus C um den Dreieckswinkel γ im gegebenen Sinn mit dem Streckungsverhältnis $\lambda = \overline{BC}/\overline{AC}$ muss A in B überführen. B ist also der Schnittpunkt der Transformierten t_1' von t_1 mit t_2. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn $t_1' \parallel t_2$, das heisst, wenn $\sphericalangle(CA, CB)$ nach Grösse und Sinn dem Winkel (t_1, t_2) gleich ist. Bewegt sich C auf g, so verschiebt sich t_1' parallel und schneidet aus t_2 eine zu C ähnliche Punktreihe B aus. Dasselbe gilt für A. AB umhüllt also eine Parabel P, die t_1 und t_2 berührt. Ist K ein Mittelpunktskegelschnitt, so führen die beiden weiteren gemeinsamen Tangenten von K und P zu je einem Dreieck ABC, für welches AB Tangente von K ist. Der geometrische Ort von C ist also eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar eine Hyperbel, da die beiden uneigentlichen Punkte reell sind.

Ist K eine Parabel, so hat diese mit P neben t_1, t_2 und der uneigentlichen Geraden nur *eine* gemeinsame Tangente, die zu einem Dreieck ABC mit C auf g führt; der geometrische Ort ist also eine Gerade.

Im oben erwähnten Ausnahmefall $t_1' \parallel t_2$ muss t_1' mit t_2 zusammenfallen, damit das Dreieck möglich wird. Das Verhältnis der Abstände des Punktes C von t_1 und t_2 muss dann nach Grösse und Vorzeichen einen bestimmten Wert λ haben; der geometrische Ort ist also eine Gerade durch den Schnittpunkt von t_1 und t_2.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitgehende Verallgemeinerungen dieser Resultate gibt J. P. SYDLER in seiner Arbeit: *Le triangle comme opérateur géométrique* (El. Math. *10*, 100–105 [1955]). Analytische Lösungen gaben C. BINDSCHEDLER und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 233. D'un point M sur le diamètre AB d'une hyperbole équilatère on mène la tangente MT (A, B, T se trouvent sur la courbe). Démontrer

$$\frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

G. VLAHAVAS, London.

---

[1]) M. KNESER: *Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass*, Arch. Math. *6*, 382–390 (387) (1955).

[2]) G. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. Sci. Math. *52*, 320–344 (324) (1928).

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Gleichung der Hyperbel in der Form $x\,y = 1$ annehmen. Die Tangente im Punkt $T(\xi, \eta)$ hat dann die Gleichung $\eta\,x + \xi\,y - 2 = 0$, und für den Durchmesser AB mit der Gleichung $y = m^2 x$ finden wir die Schnittpunkte mit der Hyperbel $A(m^{-1}, m)$, $-B(-m^{-1}, -m)$. Der Schnittpunkt M von Tangente und Durchmesser hat die Koordinaten

$$2\,\xi\,\zeta^{-1}, \quad 2\,m^2\,\xi\,\zeta^{-1} \quad \text{mit} \quad \zeta = 1 + m^2\,\xi^2.$$

Danach wird

$$\overline{AT}^2 = (\xi - m^{-1})^2 + (\xi^{-1} - m)^2 = \xi^{-2}\,m^{-2}\,(1 - m\,\xi)^2\,(\xi^2 + m^2),$$

$$\overline{AM}^2 = m^{-2}\,\zeta^{-2}\,(1 - m\,\xi)^4\,(1 + m^4).$$

Die entsprechenden Grössen für den Punkt B erhält man bei Ersatz von m durch $-m$ und damit die Behauptung. W. ENGEL, Halle a. d. Saale.

Die Lösung des Aufgabenstellers beruht darauf, dass eine Sehne TT' einer gleichseitigen Hyperbel von zwei bezüglich des Mittelpunktes symmetrischen Punkten A, B aus unter gleichen Winkeln gesehen wird. Das ergibt sich leicht aus der Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel durch zwei kongruente ungleichsinnige Strahlenbüschel[1]). Ist M' der Schnittpunkt von TT' mit AB, so gilt $\overline{AT}\,\overline{AT'} : \overline{BT}\,\overline{BT'} = \overline{M'A} : \overline{M'B}$, denn beide Seiten stellen das Verhältnis der Flächen der Dreiecke TAT' und TBT' dar. Aus $T' \to T$ folgt $M' \to M$ und damit das verlangte Resultat.

Eine Erweiterung der Fragestellung gab C. BINDSCHEDLER (Aufgabe 249, El. Math. *10*, 114).

Weitere analytische Lösungen sandten J. ERDÖSI (Budapest), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach).

Aufgabe 234. Die Gerade g durch den Mittelpunkt M des Umkreises eines Dreiecks ABC schneidet die Geraden BC, CA und AB in den Punkten A_0, B_0 und C_0. Man zeige, dass die Umkreise der Dreiecke MAA_0, MBB_0 und MCC_0 Kreise eines Büschels sind. R. LAUFFER, Graz.

Lösung des Aufgabenstellers: In der quadratischen Verwandtschaft der Spiegelung am Umkreis entsprechen den Punkten A_0, B_0 und C_0 die Punkte A_1, B_1 und C_1 der Geraden g. Die Punktepaare (A_0A_1), (B_0B_1) und (C_0C_1) sind Paare entsprechender Punkte einer Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von g mit dem Umkreis sind. Die Geraden a, b, c und $a_1 = [A_1A]$, $b_1 = [B_1B]$, $c_1 = [C_1C]$ sind Geraden eines vollständigen Vierecks mit den Punkten A, B, C und dem Schnittpunkt D von a_1 und b_1, durch welchen auch c_1 geht. Den Geraden a_1, b_1, c_1 entsprechen in der Spiegelung am Umkreis die Kreise a_0, b_0, c_0, welche Umkreise der Dreiecke MAA_0, MBB_0 und MCC_0 sind. Da die Geraden a_1, b_1, c_1 durch den Punkt D gehen, gehen die Kreise a_0, b_0, c_0 durch den Punkt D^*, welcher dem Punkt D in der Spiegelung am Umkreis entspricht. Da die Kreise a_0, b_0, c_0 auch durch den Punkt M gehen, sind sie Kreise eines Büschels.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und W. ENGEL (Halle a. d. Saale).

Aufgabe 235. Man ermittle für die Parabel den **Ort** der Zentren aller vierpunktig berührenden logarithmischen Schmiegspiralen. W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Die Zentren der zum Schnittwinkel α gehörigen logarithmischen Spiralen, welche eine gegebene Kurve k dreipunktig berühren, erfüllen die «α-Evolutoide» von k, das heisst die Einhüllende l aller Geraden g, die k unter dem Winkel α schneiden. Besitzt l eine Spitze, dann ist diese das Zentrum einer vierpunktig berührenden Schmiegspirale (Figur). Der gesuchte Ort umfasst mithin die Gesamtheit der Spitzen aller Evolutoiden von k.

---

[1]) Für einen analytischen Beweis siehe J. H. SHACKLETON BAILEY, *Elementary Analytical Conics* (Oxford University Press, 1936), S. 287.

Im Falle einer *Parabel* setzen wir k etwa durch die Parameterdarstellung

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad y = t \tag{1}$$

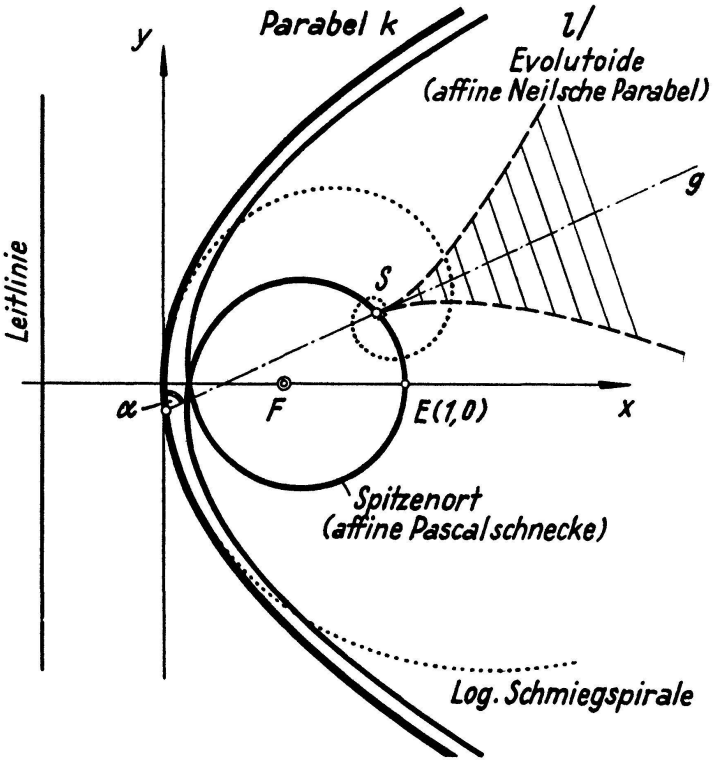
an. Die Gerade g, welche k im Punkt t unter dem Winkel α trifft, ergibt sich dann aus

$$\frac{y-t}{x-t^2/2} = \operatorname{tg}(\tau - \alpha) \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

unter Benützung der Abkürzungen $\sin\alpha = \lambda$, $\cos\alpha = \mu$ zu

$$(\lambda t - \mu)\, x + (\mu t + \lambda)\, y = \frac{\lambda}{2} t^3 + \frac{\mu}{2} t^2 + \lambda t. \tag{2}$$

Die von g eingehüllte *Evolutoide* l ist also eine Kurve 3. Klasse, nebenbei bemerkt eine



affine Neilsche Parabel. Der Berührungspunkt von g mit l liegt ausserdem auf der durch Ableitung nach t gewonnenen Geraden $\dot{g}$

$$\lambda x + \mu y = \frac{3\lambda}{2} t^2 + \mu t + \lambda, \tag{3}$$

und ist stationär, also eine *Spitze*, falls er auch noch der nächsten Ableitung

$$0 = 3\lambda t + \mu \tag{4}$$

genügt, was für $t = -\mu/3\lambda$ eintritt. Seine Koordinaten x, y berechnen sich dann aus (2) und (3) in der Form

$$x = \frac{3t^4 - 3t^2 + 2}{2(9t^2+1)}, \quad y = \frac{5t^3 - 3t}{9t^2+1}, \tag{5}$$

womit eine Parameterdarstellung des gesuchten Ortes gefunden ist.

Es handelt sich um eine zur Parabelachse x symmetrische *rationale Kurve 4. Ordnung*, die für $t = 0$ einen Scheitel (mit der Krümmung 7/3) in $E(1, 0)$ und für $t^2 = 3/5$ einen

Doppelpunkt in $D(1/10, 0)$ aufweist und einen parabolischen Ast (längs der sechspunktig oskulierenden Parabel $27\,y^2 = 50\,x - 70/27$) ins Unendliche sendet. Den Werten $t = \pm i$ entsprechen zwei (der Parabel k und ihrer Leitlinie angehörende) imaginäre Spitzen, da $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Durch eine perspektive Kollineation, welche den Brennpunkt $F(1/2, 0)$ zum Zentrum und die Leitlinie $x = -1/2$ zur Verschwindungsgerade hat (also die genannten Spitzen in die absoluten Kreispunkte wirft), wird unsere Ortskurve in eine *Pascal-Schnecke* verwandelt.

Dieselbe Kollineation führt übrigens die Einhüllende aller Spitzentangenten g in eine (konzentrische) *Kardioide* über. W. WUNDERLICH, Wien.

Aufgabe 236. Démontrer

$$\int_0^a dx \int_{x/2}^{x} y^2 e^{y^2} dy + \int_a^{2a} dx \int_{x/2}^{a} y^2 e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{a^2}(a^2 - 1) + \frac{1}{2}.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Lösung: Die linke Seite der Gleichung ist das Integral J der Funktion $f(x, y) = y^2 e^{y^2}$, erstreckt über das von den Geraden $y = a$, $y = x/2$ und $y = x$ begrenzte Dreieck. Daher ist

$$J = \int_0^a dy \int_y^{2y} f(x, y)\, dx = \int_0^a y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u\, e^u\, du = \frac{1}{2} e^{a^2}(a^2 - 1) + \frac{1}{2}.$$

A. BAGER, Hjørring.

Weitere Lösungen sandten W. ENGEL (Halle a. d. Saale) und R. LAUFFER (Graz).

Berichtigung. In Aufgabe 265 ist der zweite Satz wie folgt zu ergänzen: ... zerlegen, derart dass jede gegebene Kraft aus genau zwei Komponenten besteht, die verschiedenen Tripeln angehören.

Neue Aufgaben

271. Man beweise die folgende Aussage: Aus einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge des gewöhnlichen Raumes lassen sich vier Punkte so auswählen, dass

$$\frac{V}{V_0} \geqq \frac{2\sqrt{3}}{9\pi} = 0{,}1225\ldots$$

ausfällt, wo V_0 den Inhalt (Lebesguesches Mass) der Punktmenge bezeichnet, der positiv vorausgesetzt wird, und V der Inhalt des von den vier Punkten gebildeten Tetraeders ist. Die angegebene Schranke kann nicht verbessert werden; das Gleichheitszeichen greift dann Platz, wenn die Punktmenge ein Ellipsoid ist.

H. HADWIGER, Bern.

272. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de n nombres naturels, où $n > 2$, soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple. W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

273. Gegeben sind vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 und ein Punkt P. Gesucht werden zwei sich in P berührende Kugeln, von denen die eine K_1 und K_2, die andere K_3 und K_4 berührt. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

274. Démontrer

$$\int^{\infty} \frac{\ln x}{(1 + x^3)\sqrt[4]{x}}\, dx = -\frac{\pi^2}{9}\sqrt{2}.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. In einem konvexen Viereck stehen zwei Seiten $a = 27{,}36$ cm und $b = 12{,}64$ cm senkrecht aufeinander. Die beiden anderen Seiten sind gleich und bilden ebenfalls einen rechten Winkel. Berechne die Fläche des Vierecks.
[$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 400{,}0$ cm². Das Beispiel ist vorzüglich geeignet, dem Anfänger den Vorteil der allgemeinen Lösung vor Augen zu führen.]
2. Vollständig in Faktoren zerlegen:

$$A = x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y).$$

[A ist symmetrisch in x, y und z, für $x = y$ wird $A = 0$. Aus Symmetriegründen sind mit dem Faktor $x - y$ auch $y - z$ und $z - x$ enthalten. Dazu kommt noch ein symmetrischer Faktor 1. Grades, also $C\,(x + y + z)$. Vergleichung der Koeffizienten irgendeines auftretenden Gliedes gibt schliesslich

$$A = -(x+y+z)\,(x-y)\,(y-z)\,(z-x).]$$

3. Graphisch darstellen:

$$x^2(x^2+y^2) + 4x^2y - 2x^2 + 3y^2 - 4y + 1 = 0 \quad \text{(Bicorne, Zweispitz).}$$

[Es lohnt sich, eine für das Auswerten möglichst günstige Gleichungsform zu suchen. Man findet zunächst

$$y = \frac{(x^2-1)\left(-2 \pm \sqrt{1-x^2}\right)}{x^2+3}.$$

Da aber für die Zwecke der graphischen Darstellung das Rechnen mit dem Schieber genügend genau ist, kann der Wurzelausdruck auch im Nenner stehen, und man erhält die viel einfachere Form

$$y = \frac{1-x^2}{2 \pm \sqrt{1-x^2}}.]$$

4. Es ist reizvoll, einer Klasse die Aufgabe zu stellen, möglichst einfache, serienweise durchführbare Konstruktionen der Lemniskate

$$\varrho = c\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

zu finden. Die einfachste, die mir bisher begegnete, ist die folgende: Zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt $\varphi = 0$, $\varrho = c$, der die Geraden $\varphi = \pm\pi/4$ berührt; die Sehne, die irgendein Strahl $\varphi = \text{const}$ aus diesem Kreis schneidet, ist gleich dem zugehörigen ϱ.
5. Zeichne eine Schar von Transversalen zu drei unter sich windschiefen Geraden a, b, c.

$$\begin{aligned} a&: A_1\,(0;\,-2;\,0), & A_2\,(12;\,11;\,9);\\ b&: B_1\,(0;\,3;\,5), & B_2\,(12;\,0;\,6);\\ c&: C_1\,(6;\,10;\,2), & C_2\,(12;\,-4;\,4). \end{aligned}$$

[Es lohnt sich, ein Verfahren ausfindig zu machen, das eine rasche, serienweise

Konstruktion ermöglicht, zum Beispiel: Zwei der Geraden, etwa a und b, in ihre Parallelebenen einbetten und deren Schnittpunkte U, V mit c bestimmen. In diesen Ebenen ein Parallelenpaar um U bzw. V sich drehen lassen und mit a bzw. b schneiden; die Schnittpunkte sind jeweils Punkte einer Transversalen. Nachdem U und V bestimmt sind, ist das Verfahren in jedem Riss gesondert durchführbar, es entspricht der projektiven Erzeugung eines Kegelschnitts.]

Literaturüberschau

ARNAUD DENJOY: *Articles et mémoires*

Deux volumes, 1108 pages. Gauthier-Villars, Paris 1955

La carrière de Monsieur A. DENJOY n'est pas de celles dont les succès pourraient être attribués à la recherche d'effets faciles et de manifestations tapageuses. Si, après un demi-siècle d'activité scientifique, M. DENJOY est considéré comme une des personnalités les plus marquantes de sa génération, c'est à la rigueur de sa pensée, à la précision de ses écrits, à la profondeur de ses conceptions qu'il le doit.

Il est donc naturel qu'on ait songé à réunir, dans deux beaux volumes, ses articles et mémoires, dispersés dans de nombreuses revues dont l'accès n'est pas toujours aisé (les *Notes académiques* feront l'objet d'un autre recueil). Le premier volume contient les études relatives à la variable complexe, le second celles qui touchent au champ réel, ainsi que les *Notices sur les travaux scientifiques*, dont la lecture fournit une très belle synthèse des recherches de l'auteur. *Ch. Blanc.*

KARL MENGER: *Calculus, a Modern Approach*

Ginn & Co., Boston 1955, XVIII + 354 pages

C'est une entreprise hardie qu'a tentée M. MENGER, professeur à l'Illinois Institute of Technology, en écrivant un manuel qui sorte à ce point de la tradition habituellement suivie dans cette matière; il ne l'a pas fait au reste sans de nombreuses recherches préliminaires, et sans éprouver ses innovations auprès de jeunes étudiants.

M. MENGER a voulu tout d'abord mettre plus de clarté dans quelques notions de base, en particulier dans celles de variables et de fonctions; il le fait au prix de modifications assez profondes dans l'emploi des notations qui semblent pourtant les plus solidement établies; il est difficile de dire dès maintenant quel sort l'avenir leur réservera. Il est hors de doute cependant que certaines d'entre elles paraissent entièrement justifiées; je pense en particulier à l'introduction d'un symbole pour représenter la fonction identité, symbole qui fait curieusement défaut dans l'usage courant. Par ailleurs, l'auteur est désireux d'éviter à tout prix les abus de langages ou d'écriture; il n'est pas certain que ce point de vue soit pratiquement toujours soutenable.

En soi, la tentative de M. MENGER présente un grand intérêt: elle touche à quelques notions essentielles de l'analyse; par là, elle constitue pour tous ceux qui ont à enseigner les mathématiques élémentaires une source de perfectionnement et de réflexions utiles; sa hardiesse et son courage ne peuvent laisser indifférent. *Ch. Blanc.*

Publications scientifiques de l'Université d'Alger

Série A, Sciences mathématiques, Tome I, N° 1, juin 1954

Cette jeune revue constitue une manifestation de la vie scientifique si active de la Faculté des Sciences d'Alger; la haute valeur des articles contenus dans ce premier fascicule fait bien augurer de l'avenir de cette publication. Au sommaire de ce numéro: E. GAU, *Avant-Propos*; J. KARAMATA, *Remarque relative à la sommation des séries de*