Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik

Autor(en): **Szabó, Árpád**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ein Lehrsatz der pythagoreischen Arithmetik

Man findet den bekannten Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen im 9. Buch der *Elemente* EUKLIDS in der folgenden Form:

IX 20. Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte (=endliche) Menge von Primzahlen.

Man führt heutzutage den euklidischen indirekten Beweis dieses Satzes folgendermassen[1]: Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so liesse sich die vollständige Reihe aller Primzahlen in der Form 2, 3, 5, ..., P hinschreiben. P wäre also die letzte mögliche Primzahl der vollständigen Reihe aller Primzahlen. Nun, was sollte aber in diesem Fall die Zahl

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot P) + 1$$

sein? – Es gibt offenbar nur zwei Möglichkeiten: entweder ist Q eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl. Eine dritte Möglichkeit gibt es selbstverständlich nicht[2]. Im ersten Fall jedoch, wenn nämlich Q eine Primzahl ist, erweist sich die Behauptung, P wäre die letzte Primzahl, als falsch. Im zweiten Fall aber, wenn nämlich Q eine zusammengesetzte Zahl ist, muss diese zusammengesetzte Zahl einen Primzahlteiler besitzen, der von jeder Primzahl der angeblich vollständigen Reihe 2, 3, 5, ..., P verschieden ist. In beiden Fällen widerlegt sich also die falsche Behauptung, dass P die letzte Primzahl bzw. die Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, ..., P vollständig wäre, und damit gilt der Satz als bewiesen.

Dies ist die genaue Wiedergabe des euklidischen Gedankenganges. Seine Beweisführung unterscheidet sich ein wenig von der eben dargestellten eigentlich nur darum, weil die mathematische Formelsprache EUKLIDS nicht vollkommen dieselbe ist wie die unsrige. In seiner Darstellung wird zum Beispiel die angeblich vollständige Reihe der Primzahlen bloss durch drei Buchstaben a, b, c gekennzeichnet, und dementsprechend wird die Zahl Q gebildet, indem man unter Anwendung des Satzes *Euclid* VII 36 das kleinste gemeinsame Vielfache *dreier* Zahlen sucht und zu der so gewonnenen Zahl die Einheit addiert. Es untersteht jedoch keinem Zweifel, dass der Sinn der ganzen Beweisführung schon bei EUKLID derselbe war wie in der obigen, heute üblichen Formelsprache.

Es fragt sich nun, aus welcher Zeit wohl der Satz *Euclid* IX 20 stammen könnte? – O. BECKER hat nämlich die unmittelbar darauffolgenden letzten sechzehn Sätze (21–36) desselben Buches aus dem Gefüge der euklidischen Darstellung aussondern können. Diese Sätze stellen, als ein «Nachtrag» bei EUKLID, die seitdem wohlbekannte altpythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden dar[3]. Dabei bemerkte BECKER auch über unseren Satz: «*IX 20 ist der Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen, der in der antiken Arithmetik ganz isoliert dasteht. Auch er ist*

---

[1]) Vgl. G. PÓLYA, *Schule des Denkens (Vom Lösen mathematischer Probleme)*. (Bern 1949), S. 192ff.

[2]) Die antike Arithmetik liess weder die Einheit noch die Brüche als Zahlen gelten; vgl. die Definitionen 1, 2, 11 und 13 bei EUKLID am Anfang des 7. Buches.

[3]) Vgl. O. BECKER, *Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente*, Quell. Gesch. Math. [B] *3*, 533-553 (1936).

also wohl ein Nachtrag; mit dem Vorhergehenden hängt er innerlich nicht zusammen»[4]). – Man wird sich hüten, den ersten Teil dieser Behauptung, dass nämlich der Satz IX 20 in der ganzen antiken Arithmetik «isoliert dastünde», in dem Sinne missdeuten zu wollen, als ob dieser Satz auf keine anderen aus EUKLID wohlbekannten Sätze gebaut wäre. O. BECKER hat mit dem Hinweis auf das Isoliertsein dieses Satzes in der antiken Arithmetik wohl etwas anderes gemeint.

Allerdings lassen sich jene Sätze, die in dem euklidischen Beweis des Satzes IX 20 benutzt werden, leicht zusammenstellen. Es wird vor allem der Satz *Euclid* VII 36 benutzt[5]). Und ebenso wird auch auf die Sätze VII 31–32 hingewiesen[6]). Ja man kann auch noch darüber hinausgehend feststellen, dass EUKLID im Beweis des Satzes IX 20 auch solche Sätze benutzt, die er allem Anschein nach nur versehentlich vergessen hatte, in das Gefüge seines 7. Buches hineinzubauen[7]).

Man könnte also auf diese Weise den vollständigen Stammbaum des Satzes IX 20 zusammenstellen. Der Satz selbst baut sich auf zwei Definitionen des 7. Buches (*Definition* 11 und 13) und auf die Sätze VII 36 und VII 31–32 sowie auf jene vergessenen Sätze, die durch den Beweis des Satzes VII 28 bezeugt werden. Der Satz

---

[4]) Vgl. O. BECKER, *Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente*, Quell. Gesch. Math. [B] *3*, 543 (1936).

[5]) *VII 36. Zu drei gegebenen Zahlen die kleinste Zahl zu finden, die von ihnen gemessen wird.* – Man würde diesen Satz heute etwas allgemeiner formulieren. Es handelt sich ja um das Suchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, aber es ist dabei einerlei, ob man das kleinste gemeinsame Vielfache dreier oder auch mehrerer Zahlen sucht. Bei EUKLID wird der Satz nur für den Fall dreier Zahlen aufgestellt, und in derselben Form wird der Satz auch im Beweis vom IX 20 benutzt.

[6]) VII 31. *Jede zusammengesetzte Zahl wird von irgendeiner Primzahl gemessen.*
VII 32. *Jede Zahl ist entweder Primzahl oder wird von irgendeiner Primzahl gemessen.*

[7]) Es heisst nämlich im Beweis des Satzes IX 20: «Ist die Zahl $Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot P) + 1$ eine zusammengesetzte Zahl, so muss sie einen Primzahlteiler h besitzen (Hinweis auf Satz *Euclid* VII 31). Diese Primzahl h kann jedoch keine der angeblich vollständigen Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, ..., P sein. Wäre nämlich h eine Primzahl der genannten Reihe, so hiesse es, dass sie Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der aufgezählten Primzahlen, also der Zahl $Q - 1$, und dabei auch ein Teiler der Einheit selbst ist. Was jedoch unmöglich ist.» – Der Herausgeber I. L. HEIBERG verweist im Zusammenhang mit dieser Beweisführung auf den Beweis des Satzes VII 28, wo er über die herausgefallenen Sätze bemerkte: *Nusquam apud Euclidem demonstrata sunt; pro axiomatis* (?) *ea habuit* (Bd. 2, S. 247). Man könnte die herausgelassenen Sätze etwa folgendermassen rekonstruieren:

1. *Besitzen zwei Zahlen, a und b, einen gemeinsamen Teiler, c, so ist c auch ein Teiler der Summe der beiden Zahlen, $a + b$.* Denn

$$\frac{a}{c} = d, \quad a = c\,d,$$

$$\frac{b}{c} = e, \quad b = c\,e, \quad \frac{a+b}{c} = d + e. \quad a + b = c\,(d + e).$$

Und

2. *Ist irgendeine Zahl (c) Teiler der Summe zweier Zahlen ($a + b$) und dabei auch Teiler des einen Summanden (a), so ist dieselbe Zahl (c) auch Teiler des anderen Summanden (b).*

Gebraucht wird der hier wiederhergestellte Satz 2 nicht nur bei EUKLID in den Beweisen der Sätze VII 1, VII 28 und IX 20, sondern auch in einem Beweis des ARCHYTAS (BOETIUS, *De inst. mus.* III, 11 ed G. FRIEDLEIN): *Si enim est numerus D et pars es eius, qui est DE, metitur D numerus DE numerum; quocirca et E numerum metietur...*, wobei durch DE die Summe der Zahlen $D+E$ bezeichnet wird. Mit Recht bemerkte VAN DER WAERDEN (Math. Ann. *120*, 139 [1947–1949]), dass in diesem Beweis des ARCHYTAS die genaue Ausführung aller einzelnen Beweisschritte bis zur Pedanterie übertrieben wird. Derselbe Beweis wird etwas knapper und weniger umständlich auch in der Sectio canonis III wiederholt – aber *ohne* einen Hinweis auf den hier wiederhergestellten Satz 2. – Aus der Tatsache, dass nach dem Wortlaut des BOETIUS ARCHYTAS in seinem Beweis auch den Satz 2 benutzte, folgt: die hier wiederhergestellten Sätze 1 und 2 gehörten in denselben pythagoreischen Lehrgang der Zahlentheorie im 5. Jahrhundert, der später im 7. Buch der euklidischen *Elemente* ohne erhebliche Änderungen, nur evtl. verkürzt wiedergegeben wurde; vgl. VAN DER WAERDEN, Math. Ann. *120*, 132-146.

VII 36 baut sich dagegen seinerseits auf Satz VII 34 und benutzt dabei auch seinen eigenen Hilfssatz VII 35. Und so könnte man weitergehend nachweisen, dass auch die Sätze VII 19, VII 21, VII 20, VII 17 und VII 33 Mitglieder desselben Stammbaumes vom IX 20 darstellen.

Der Satz IX 20 baut sich also auf lauter Sätze aus dem 7. Buch der *Elemente*. Durch diese Tatsache wird die Datierung unseres Satzes (IX 20) ungewöhnlich erleichtert. Es ist nämlich zuletzt B. L. VAN DER WAERDEN nachzuweisen gelungen, dass die ersten 36 Sätze des 7. Buches der *Elemente* einen Lehrgang der pythagoreischen Zahlentheorie oder einen Teil eines solchen Lehrganges darstellen, welcher schon vor 400 v. Chr. schriftlich fixiert wurde und den EUKLID später ohne erhebliche Änderungen übernommen hatte[8]). Dasselbe muss natürlich auch für den Satz IX 20 gültig sein; auch er muss ein alter Bestandteil jenes Lehrganges der pythagoreischen Zahlentheorie gewesen sein. Diese Vermutung wird auch noch durch die folgende Beobachtung erhärtet.

Über die Sätze VII 29, VII 30, VII 31 und VII 32 bemerkte VAN DER WAERDEN: «*Sie werden in den Elementen nirgends mehr benutzt. Es ist also nicht gut denkbar, dass Euklid oder einer seiner Vorgänger im vierten Jahrhundert sie neu hinzugefügt hätte, sondern es ist viel wahrscheinlicher, dass sie in der pythagoreischen Vorlage bereits vorhanden waren*»[9]).

Nun stimmt allerdings diese Feststellung auf die Sätze VII 31–32 nicht ganz und gar; diese Sätze sind nämlich zum Beweis des Satzes IX 20 unumgänglich nötig; sie werden also an einem wichtigen Punkt der *Elemente* doch benutzt. Man kann sogar behaupten: Die Sätze VII 31–32 sind gerade in der Absicht formuliert worden, um den Beweis des Satzes IX 20 zu ermöglichen; denn sie können in sich allein kaum irgendein Interesse für sich beanspruchen, sie sind ja auf Grund der Definitionen 11 und 13 des 7. Buches so gut wie selbstverständlich, und man fragt sich: Warum sind überhaupt die VII 31–32 als «selbständige» Sätze aufgestellt worden? – Die Antwort liegt auf der Hand; sie sind eben keine selbständigen Sätze. Man sieht besonders am Satz VII 32, dass er eigentlich nur einen *Hilfssatz* zu dem Beweis von IX 20 darstellt[10]).

Sind aber die Hilfssätze VII 31–32 pythagoreisch und stammen sie aus der Zeit vor 400 – und ebenso jene herausgefallenen Sätze, die wir in Anmerkung 7 wiederhergestellt hatten –, so muss selbstverständlich auch der Hauptsatz IX 20 pythagoreisch sein und aus dem 5. Jahrhundert stammen. Man stellt ja gewöhnlich Hilfssätze nur auf, um irgendeinen wichtigen Hauptsatz lückenlos beweisen zu können.

Man kann in unserem Fall auch noch den vermutlichen Grund angeben: warum eigentlich der wichtige Satz über die Existenz unendlich vieler Primzahlen nur als ein *Nachtrag* am Ende des 9. Buches vor einem anderen «Nachtrag» untergebracht wurde und warum er nicht einen Platz unter den Sätzen des 7. Buches fand? – Er passte eben nicht in das festgefügte und geschlossen-kompakte System des 7. Buches[11]). Wohl ist er ebenso pythagoreisch wie das 7. Buch, und man findet

[8]) B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Arithmetik der Pythagoreer* I., Math. Ann. *120*, 127–146; vgl. jetzt B. L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening* (Groningen 1954).

[9]) Math. Ann. *120*, 144.

[10]) Der andere Hilfssatz VII 31 wird meines Wissens nur noch im Beweis des Satzes *Euclid* IX 13 zweimal benutzt, wo der Herausgeber I. L. HEIBERG beide Male irrtümlich auf VII 32 hinweist.

[11]) Math. Ann. *120*, 145.

auch sämtliche Sätze, auf die er gebaut ist, im 7. Buch der *Elemente*, aber er unterscheidet sich doch durch seinen Inhalt von dem, was in diesem Buch behandelt wird. Auch am Ende des 7. Buches hätte dieser Satz den Zusammenhang mit der Fortsetzung, dem 8. Buch (der Erbschaft des ARCHYTAS), gestört. Er musste also, herausgerissen aus jenem «pythagoreischen Lehrgang», irgendwo zum «Nachtrag» werden.

Dass der Satz IX 20 erst später, etwa irgendwann im 4. Jahrhundert, aufgestellt sei, ist gar nicht wahrscheinlich. Es ist ja bekannt, dass seit THEAITETOS († 367) das bevorzugte Gebiet der griechischen Mathematik die Geometrie ist; man wendet sich in dieser Zeit von der Arithmetik schon ab[12]). Nun wird man aber einen so wichtigen arithmetischen Satz, wie *Euclid* IX 20, doch wohl eher in der Zeit finden können, wo die Arithmetik noch in ihrer Blüte ist[13]).

Damit wäre also der pythagoreische Ursprung des Satzes *Euclid* IX 20 wahrscheinlich. Man müsste nur noch erklären können: inwiefern er in der antiken Arithmetik «isoliert dastünde».

O. BECKER untersuchte im Laufe seiner Eudoxos-Studien die Anwendung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Mathematik[14]), und er kam dabei zum bemerkenswerten Schlusse, dass dies Prinzip in der klassischen Wissenschaft nicht unbeschränkt verwandt, sondern in seiner «transfiniten» Form vermieden worden sei. Ja er konnte in diesem Zusammenhang von der «intuitionistischen Haltung» der griechischen Mathematiker sprechen. Wohl musste zwar BECKER bei EUKLID hie und da kleinere Abweichungen von der Brouwerschen Methode oder plumpere Formulierungen, die intuitionistisch unzulässig sind, feststellen. Aber im grossen und ganzen sah es doch so aus, als ob keine gröberen Verstösse gegen die intuitionistische Logik bei EUKLID vorkämen. Am eindeutigsten schien EUDOXOS den intuitionistischen Forderungen Genüge zu leisten. Im weiteren stellte sich dann BECKER die Frage, ob sich jene These BROUWERS, dass die aristotelische Logik aus der Lehre von den endlichen Mengen abstrahiert worden sei[15]), historisch rechtfertigen liesse? Nach einer Prüfung der Schlussweisen in den beiden aristotelischen Schriften *De interpretatione* und *Analytica priora* konnte er dann feststellen, dass in diesen Werken – abgesehen von einer einzigen Ausnahme – eigentlich gar keine transfiniten Schlüsse vorkämen.

---

[12]) Vgl. VAN DER WAERDEN, Math. Ann. *117*, 155ff., besonders 158 (1940).

[13]) Es ist übrigens interessant, dass der *post-zenonische* Ursprung des Hilfssatzes *Euclid* VII 31 klar zutage liegt. Im Beweis dieses Satzes (siehe oben die Anmerkung 6) heisst es nämlich: sei a eine zusammengesetzte Zahl, und b ihr Teiler. Ist b eine Primzahl, so ist der Satz bewiesen; ist jedoch b eine zusammengesetzte Zahl, so muss sie einen Teiler c besitzen, der selbstverständlich auch ein Teiler von a ist. Nun kann aber c wieder entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Im ersten Fall ist der Satz bewiesen, denn wir haben eine Primzahl c, die Teiler von b und dadurch auch derjenige von a ist. Ist aber c eine zusammengesetzte Zahl, so prüft man weiter ihren Teiler d usw. – Der Beweis betont, dass man auf diese Weise schliesslich einen Primzahlteiler der zusammengesetzten Zahl a finden wird. Sollte man nämlich nie den gesuchten Primzahlteiler finden und wären die Teiler von a lauter zusammengesetzte Zahlen, so hiesse es, dass die Zahl a unendlich viele, immer kleiner werdende Teiler besitzt, was jedoch im Bereiche der Zahlen unmöglich ist (*ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς*). – Nun sieht man, wie der Verfasser dieses Beweises den Bereich der Zahlen gegen jenes andere Gebiet behutsam abgrenzt, wo die unendlich vielen, immer kleiner werdenden Teiler doch möglich sind. Bekanntlich war es ZENON, der zum ersten Male darauf hingewiesen hatte, dass jede Strecke AB die unendlich vielen, immer kleiner werdenden Teiler 1/2, 1/4, 1/8... besitzt; vgl. Aristot. phys. Z. 9.239 b 9ff.

[14]) *Eudoxos-Studien* IV., Quell. Gesch. Math. [B] *3*, 370ff. (1936).

[15]) L. E. J. BROUWER, *Intuitionistische Mengenlehre*, Jber. deutsch. Math.-Ver. *28*, 203ff. (1919).

Interessant sind diese Beobachtungen für uns deswegen, weil die Beweisführung unseres Satzes (IX 20) bei EUKLID eindeutig transfinit ist. Es wird aus der Tatsache, dass die als Beispiel geprüfte Menge der Primzahlen *nicht* vollständig ist, auf die Existenz unendlich vieler Primzahlen geschlossen. Kein Zweifel, diese Schlussweise ist intuitionistisch unzulässig! – O. BECKER wollte also mit der Bemerkung, dass der Satz IX 20 in der ganzen antiken Arithmetik isoliert dastünde, wohl eben diese Tatsache unterstreichen. – Aber ist denn dieser Satz in der antiken Wissenschaft wirklich so vollkommen isoliert? – Nehmen wir jenen einzigen Ausnahmefall der aristotelischen Ersten Analytik, in dem ein Verstoss gegen die intuitionistische Denkweise zu beobachten ist. Es handelt sich hier[16]) um den Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite, als Beispiel einer *Deductio ad absurdum.* BECKER schreibt darüber folgendes:

«Auch in diesem Fall liegt eine eigentliche transfinite Schlussweise nicht vor. Allerdings ist die Disjunktion zwischen messbaren und unmessbaren Strecken nicht endlich entscheidbar, im Gegensatz etwa zu der zwischen geraden und ungeraden Zahlen. *Insofern besteht hier schon ein Ausnahmefall, merkwürdigerweise auch sonst bei diesem mathematischen Problem, denn in der Deductio ad absurdum der Messbarkeit der Diagonale werden leere Begriffe verwandt; die Klasse der messbaren Diagonale ist ja die Nullklasse.*»

Man muss dazu nur bemerken, dass der Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite ebenso pythagoreischen Ursprungs ist[17]), wie nach unserer Vermutung auch der Satz *Euclid* IX 20.

Die bisher bekannten beiden auffallendsten Verstösse der antiken Mathematik gegen den Intuitionismus stammen also von den Pythagoreern. Man wäre also geneigt anzunehmen, dass die transfinite Schlussweise in der ältesten Periode der griechischen Mathematik bei den Pythagoreern des 5. Jahrhunderts noch *nicht* verpönt war, sie wurde erst im 4. Jahrhundert von EUDOXOS ab vermieden. Die Logik des 5. Jahrhunderts wäre also noch nicht dieselbe wie später diejenige des ARISTOTELES.

ÁRPÁD SZABÓ, Budapest.

Über die Grundlösungen der Gleichung

$$a^2+b^2+c^2=d^2$$

Von einer «*Grundlösung*» unserer Gleichung sprechen wir, wenn a, b, c, d natürliche Zahlen mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler 1 sind. Lösungen, die sich nur durch Permutation von a, b, c unterscheiden, gelten als *dieselbe* Lösung.

Man erhält *jede Grundlösung* der pythagoreischen Gleichung (G) $a^2+b^2+c^2=d^2$, und zwar jede *genau einmal,* wenn man in den nachfolgenden Formeln (A), (B), (C) und (D) für die Parameter s, t, u und v alle ganzen Zahlen einsetzt, die mit den

[16]) *Analytica priora* I 31 (46 b, 28 35).
[17]) Vgl. O. BECKER, Quell. Gesch. Math. [B.] *3*, 544ff. (1936).