Einführung in die Theorie der quasikonformen Abbildungen

Autor(en): **Künzi, H.P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18628

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XI Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1956

Einführung in die Theorie der quasikonformen Abbildungen

Zum 60. Geburtstag von Herrn Walter Saxer, am 2. Dezember 1956

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit über *Entwicklung und Bedeutung der konformen Abbildung* [5][1]) beleuchtete ich den allgemeinen Abbildungsbegriff und wies vor allem auf die spezielle funktionentheoretische Transformation hin, die vermittels analytischer Funktionen erzeugt und als konforme Abbildung bezeichnet wird. Am Schlusse dieser Betrachtung wurde noch auf eine allgemeinere Abbildungsart hingewiesen, nämlich auf die quasikonforme, die im Zuge der modernen Untersuchungen, besonders im Zusammenhang mit der Funktionentheorie, immer grössere Bedeutung erlangt. Gleich wie in diesem erwähnten Artikel über konforme Abbildungen möchte ich hier versuchen, die Grundlagen der quasikonformen Abbildungen mit möglichst elementaren Hilfsmitteln zu entwickeln. Besonderer Wert sei dabei auf die Gegenüberstellung von quasikonformen und konformen Abbildungen gelegt, und weiter möge aus diesen Betrachtungen hervorgehen, wie eine quasikonforme Abbildung im Grenzfall in eine konforme übergehen kann.

Im vorliegenden Beitrag verwende ich die übliche Terminologie, wie sie von GRÖTZSCH [2] und TEICHMÜLLER [8] vorgeschlagen wurde, weiter durfte ich ein unveröffentlichtes Manuskript von H. WITTICH benützen.

2. Stetige und stetig differenzierbare Abbildungen

Stellen wir uns die Aufgabe, das Innere des Kreises $x^2+y^2<1$ stetig auf die punktierte Ebene $u^2+v^2<\infty$ abzubilden, so ist das möglich durch

$$u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad v=\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Diese Zuordnung ist umkehrbar eindeutig, denn

$$x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2+v^2}}, \qquad y=\frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 129.

Wir haben es also hier mit einer topologischen Abbildung, das heisst einer umkehrbar eindeutigen und stetigen Transformation zu tun, die den Einheitskreis einer z-Ebene auf eine punktierte w-Ebene bezieht. Im folgenden untersuchen wir allgemeine topologische Abbildungen $w = w(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, bei denen sich die beiden Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ eindeutig verhalten und zudem u_x, u_y, v_x, v_y noch stetig sind. Wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit unserer Abbildung ist die Funktionaldeterminante

$$\Delta = u_x v_y - u_y v_x \neq 0$$

in jedem Punkt z des Existenzgebietes. Für unsere Beispiele setzen wir stets $\Delta > 0$ voraus.

Bei der oben betrachteten Funktion interessieren wir uns jetzt für die erste Ableitung im Punkte z_0, und zwar in einer bestimmten Richtung φ. Dabei gehen wir aus vom Differenzenquotienten $\Delta w/\Delta z$ und setzen $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = w(z) - w(z_0)$. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit ist

$$u = u_x(\zeta)\, \Delta x + u_y(\zeta)\, \Delta y = u_x(z_0)\, \Delta x + u_y(z_0)\, \Delta y + \langle \varepsilon \rangle \Delta x + \langle \varepsilon \rangle\, \Delta y, \tag{1}$$

$$v = v_x(\zeta)\, \Delta x + v_y(\zeta)\, \Delta y = v_x(z_0)\, \Delta x + v_y(z_0)\, \Delta y + \langle \varepsilon \rangle \Delta x + \langle \varepsilon \rangle \Delta y. \tag{1'}$$

Mit $\langle \varepsilon \rangle$ bezeichnen wir wie üblich eine Grösse, deren Betrag $< \varepsilon$ ist. (1) und (1′) gelten also in einer ε-Umgebung von z_0, das heisst für $|z - z_0| < r(\varepsilon)$.

Für den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\, \Delta v}{\Delta x + i\, \Delta y} = \frac{(u_x + i\, v_x)\, \Delta x + (u_y + i\, v_y)\, \Delta y}{\Delta x + i\, \Delta y} + \langle \varepsilon \rangle$$

führen wir die Richtungsabhängigkeit ein durch $\Delta x = r \cos\varphi$ und $\Delta y = r \sin\varphi$ und gehen für diese Richtung zum Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = \frac{(u_x + i\, v_x) \cos\varphi + (u_y + i\, v_y) \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

über. Die notwendige Bedingung für die Richtungsabhängigkeit erhalten wir bekanntlich so:

Für $\varphi = 0$ ist

$$\frac{dw}{dz} = u_x + i\, v_x$$

und für $\varphi = \pi/2$ ist

$$\frac{dw}{dz} = -i\, u_y + v_y,$$

also gilt

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x. \tag{2}$$

Umgekehrt kann man auch zeigen, dass wenn neben den gemachten Voraussetzungen auch die Beziehung (2) erfüllt ist, die Abbildung eine bestimmte, richtungsunabhängige Ableitung $dw/dz|_{z=z_0}$ besitzt und $w(z)$ zudem im Punkte $z = z_0$ eine eindeutige analytische Funktion darstellt.

Im weitern interessieren wir uns wieder für den allgemeinen richtungsabhängigen Fall und setzen

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = (u_x^2 + v_x^2)\cos^2\varphi + 2\,(u_x u_y + v_x v_y)\sin\varphi\cos\varphi + (u_y^2 + v_y^2)\sin^2\varphi. \tag{3}$$

Für den Ausdruck rechts in (3) schreiben wir noch

$$h(\varphi) = E\cos^2\varphi + 2\,F\sin\varphi\cos\varphi + G\sin^2\varphi.$$

Nimmt φ alle Werte zwischen 0 und 2π an, so weist die Funktion $h(\varphi)$ ein Maximum M und ein Minimum m auf, so dass für alle φ gilt

$$m \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq M.$$

Die Extremalwerte m und M erhalten wir, indem die quadratische Form für $|dw/dz|^2$ auf die Hauptachsenform gebracht wird und für die dann die zugehörige Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} E-\lambda & F \\ F & G-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

aufzulösen ist. Die beiden reellen Wurzeln ergeben die Werte

$$\lambda_1 = m = \frac{E+G-\sqrt{(E+G)^2-4\,\Delta^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = M = \frac{E+G+\sqrt{(E+G)^2-4\,\Delta^2}}{2} \tag{4}$$

$$(\Delta^2 = E\,G - F^2).$$

Besonderes Interesse verdient der Quotient

$$D = \frac{\operatorname{Max}\left|\frac{dw}{dz}\right|}{\operatorname{Min}\left|\frac{dw}{dz}\right|} = \sqrt{\frac{M}{m}}. \tag{5}$$

Um diesen auszurechnen, setzen wir nach (4)

$$M + m = E + G \qquad \text{und} \qquad m\,M = \Delta^2 = E\,G - F^2.$$

Dann ist

$$1 \leqq \frac{M+m}{2\sqrt{M\,m}} = \frac{E+G}{2\,\Delta} = K = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right).$$

Daraus aber folgt

$$D = \sqrt{\frac{M}{m}} = K + \sqrt{K^2-1}. \tag{6}$$

Es ist nun unser Ziel, die geometrische Bedeutung des gefundenen Quotienten zu finden. Dazu approximieren wir unsere Abbildung $w = w(z)$ in der Umgebung des

Punktes z_0 durch eine nicht ausgeartete affine Abbildung

$$\left.\begin{aligned} u - u(z_0) &= a\,\Delta x + b\,\Delta y, \\ v - v(z_0) &= c\,\Delta x + d\,\Delta y \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder als Umkehrfunktion

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \alpha\,\Delta u + \beta\,\Delta v, \\ y - y_0 &= \gamma\,\Delta u + \delta\,\Delta v. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Aus

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 = r^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= (\alpha^2 + \gamma^2)\,\Delta u^2 + 2\,(\alpha\,\beta + \gamma\,\delta)\,\Delta u\,\Delta v + (\beta^2 + \delta^2)\,\Delta v^2 \end{aligned}$$

entnehmen wir, dass aus der Kreislinie $|z - z_0| = r$ durch die affine Abbildung in der w-Ebene eine Ellipse $\mathfrak{E}$ entsteht, mit dem Mittelpunkt in $w(z_0)$. In Analogie zu (3) erhalten wir jetzt unter Berücksichtigung von (7) die Beziehung

$$\frac{|w - w_0|^2}{|z - z|^2} = \frac{\varrho^2}{r^2} = (a^2 + c^2)\cos^2\varphi + 2\,(a\,b + c\,d)\sin\varphi\cos\varphi + (b^2 + d^2)\sin^2\varphi \tag{8}$$

und schliessen daraus, dass die Ellipse $\mathfrak{E}$ die Halbachsen $r\sqrt{M}$ und $r\sqrt{m}$ aufweist. Damit erkennen wir auch, dass die in (6) eingeführte Grösse geometrisch das Verhältnis von grosser Achse zu kleiner Achse der Verzerrungsellipse $\mathfrak{E}$ darstellt. Schreiben wir jetzt unsere ursprüngliche Funktion $w = w(z)$ in der Form

$$\begin{aligned} w = w(z) &= u(x, y) + i\,v(x, y) \\ &= u(z_0) + a\,\Delta x + b\,\Delta y + i\,v(z_0) + i\,c\,\Delta x + i\,d\,\Delta y + \langle\varepsilon\rangle, \end{aligned}$$

so können wir nach den obigen Erläuterungen schliessen, dass das Bild des Kreises $|z - z_0| = r < r(\varepsilon)$ eine einfache geschlossene Linie darstellt, die um so weniger von einer Ellipse abweicht, je kleiner der Radius r des Kreises wird, das heisst mit anderen Worten: Unsere Funktion $w = w(z)$ bildet einen infinitesimalen Kreis um z_0 in eine infinitesimale Ellipse um den Punkt $w(z_0)$ ab mit dem Hauptachsenverhältnis

$$D = \sqrt{\frac{M}{m}} = K + \sqrt{K^2 - 1}.$$

$D = D_{z/w}$ bezeichnet man als den *Dilatationsquotienten* der Abbildung, der ebenfalls eine Funktion von z ist und nach Definition $\geqq 1$ sein muss. Für $D = 1$ folgt nach (6), dass auch $K = 1$ werden muss, und weiter

$$\frac{E + G}{2\sqrt{EG - F^2}} = 1 \quad \text{oder} \quad (E - G)^2 = -4\,F^2,$$

das ist der Fall für

$$E = G \quad \text{und} \quad F = 0. \tag{9}$$

Die Relation (9) ist auch gleichbedeutend mit

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \tag{10}$$

oder

$$u_x = -v_y \quad \text{und} \quad u_y = v_x. \tag{10'}$$

In beiden Fällen geht also ein infinitesimaler Kreis um z_0 in einen infinitesimalen Kreis um w_0 über. Bei (10) bleibt der Umlaufssinn erhalten, und die Abbildung ist in der Umgebung von z_0 konform. (10′) liefert uns hingegen eine indirekt konforme Abbildung in der Umgebung von z_0, bei der der Drehsinn durch die Abbildung geändert wird. Zusammenfassend halten wir fest:

Die Funktion $w = w(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ sei in einem Gebiet G_z der z-Ebene eindeutig mit stetig differenzierbaren Real- und Imaginärteilen. Die Abbildung von G_z auf ein Gebiet G_w der w-Ebene heisst dann quasikonform, wenn der Dilatationsquotient $D_{z/w}$ gleichmässig beschränkt bleibt, das heisst $D_{z/w} \leqq C$, wobei C unabhängig von z bleibt.

3. Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen im Kleinen

1.
$$D_{z/w} = D_{w/z}. \tag{11}$$

Dies ergibt sich sofort aus den bekannten Differenzierbarkeitsregeln der Umkehrfunktionen.

2.
$$\frac{1}{D_{z/w}} \cdot \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq D_{z/w} \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}\,^{2)}. \tag{12}$$

Beweis: Aus

$$m \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq M \qquad \text{und} \qquad \Delta = \sqrt{M\,m} = \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}$$

folgt

$$\frac{1}{D_{z/w}} \cdot \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} = \frac{m}{\Delta}\,\Delta = m \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq \frac{M}{\Delta}\,\Delta = \sqrt{\frac{M}{m}}\,\Delta = D_{z/w}\,\frac{d\sigma_w}{d\sigma}.$$

3. Für die zusammengesetzte Abbildung

$$\zeta = \zeta(z) \quad \text{und} \quad w = w(\zeta)$$

oder direkt $w = f(z)$ gilt

$$D_{z/w} \leqq D_{z/\zeta}\, D_{\zeta/w}. \tag{13}$$

Beweis:

$$\operatorname{Max}\left|\frac{dw}{dz}\right| \leqq \operatorname{Max}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \operatorname{Max}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|,$$

$$\operatorname{Min}\left|\frac{dw}{dz}\right| \geqq \operatorname{Min}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \operatorname{Min}\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|.$$

Dividieren wir die beiden Ungleichungen durcheinander, so folgt die Behauptung.

4. Der Dilatationsquotient ist eine *konforme Invariante*: $w = w(z)$ bilde G_z quasikonform in G_w ab. G_ζ und G_ω seien konforme Bilder von G_z und G_w. Die zusammengesetzte Abbildung $\zeta \to z \to w \to \omega$ ergibt eine quasikonforme Abbildung von G_ζ in

---

[2]) Mit $d\sigma_z$ bzw. $d\sigma_w$ bezeichnen wir das Flächenelement in der z- bzw. in der w-Ebene.

G_ω mit

$$D_{\zeta/\omega} = D_{z/w}. \tag{14}$$

Beweis: Aus der Richtungsunabhängigkeit von

$$\left|\frac{d\omega}{dw}\right| \quad \text{und} \quad \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|$$

folgt

$$D_{\zeta/\omega} = \frac{\operatorname{Max}\left|\frac{d\omega}{dw}\right| \cdot \left|\frac{dw}{dz}\right| \cdot \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|}{\operatorname{Min}\left|\frac{d\omega}{dw}\right| \cdot \left|\frac{dw}{dz}\right| \cdot \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|} = \frac{\operatorname{Max}\left|\frac{dw}{dz}\right|}{\operatorname{Min}\left|\frac{dw}{dz}\right|} = D_{z/w}.$$

4. Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen im Grossen

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, so spielen die quasikonformen Abbildungen in der Funktionentheorie eine sehr zentrale Rolle, denn oft kommt es vor, dass eine Hilfsabbildung von einem Gebiet G_z auf ein Gebiet G_w auszuführen ist, bei der die Ränderzuordnung vorgeschrieben ist. Diese Aufgabe lässt sich im allgemeinen nicht mehr konform, oft aber noch quasikonform ausführen, wie das im folgenden Beispiel gezeigt werden soll.

Das Rechteck

$$\mathfrak{R}_z: \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

soll so quasikonform auf das Rechteck

$$\mathfrak{R}_w: \quad 0 \leqq u \leqq \pi, \quad 0 \leqq v \leqq 1$$

abgebildet werden, dass alle Randpunkte festbleiben, bis auf die Punkte der oberen Seite, für die die vorgegebene Zuordnung gelte:

$$\{x = t,\ y = 1\} \to \{u = t + \gamma \sin t,\ v = 1\}$$

$$\left(0 \leqq t \leqq \pi \quad \text{und} \quad 0 \leqq \gamma \leqq \frac{1}{2}\right).$$

Diese Abbildung kann angegeben werden durch

$$u = x + y\,\omega(x), \quad v = y \quad \text{mit} \quad \omega(x) = \gamma \sin x.$$

Dann ist

$$u_x = 1 + y\,\omega', \quad u_y = \omega(x), \quad v_x = 0, \quad v_y = 1,$$

$$E = (1 + y\,\gamma \cos x)^2 \leqq (1 + \gamma)^2, \quad G = 1 + \omega^2 \leqq 1 + \gamma^2,$$

$$F = (1 + y\,\omega')\,\omega \geqq \frac{1}{2}(\gamma - 1).$$

Aus $K = (E + G)/2\Delta$ folgt die Abschätzung für die Dilatation.

Für kleines γ weicht die Abbildung wenig von der Identität ab. Ähnliche Abbildungen wurden in letzter Zeit häufig im Zusammenhang mit der modernen Wertverteilungslehre verwendet [6]. Im Zentrum solcher Betrachtungen steht der fundamentale Verzerrungssatz von TEICHMÜLLER [8] und WITTICH [11], den wir hier ohne Beweis wie folgt erwähnen möchten:

Die punktierte z-Ebene sei eineindeutig und quasikonform auf die punktierte w-Ebene abgebildet. Für den Dilatationsquotienten gelte eine Abschätzung $D \leqq C(|z|)$, wo $C(r)$ für $r \to \infty$ so schnell gegen 1 *strebt, dass das Integral*

$$\int^{\infty} \{C(r) - 1\} \frac{dr}{r}$$

konvergiert, dann ist bei Annäherung an den unendlich fernen Punkt

$$|w| \approx \gamma\, |z|$$

(γ bedeutet eine Konstante, über die man Näheres aussagen kann). Auch diese Relation stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der konformen Abbildungen dar, denn bildet $\omega = \omega(\zeta)$ eine Umgebung von $\zeta = \infty$ in eine solche von $\omega = \infty$ mit $\omega(\infty) = \infty$ schlicht und konform ab, so folgt aus

$$\omega(\zeta) = a\,\zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \cdots = a\,\zeta\left(1 + \left\{\frac{1}{\zeta}\right\}\right),$$

dass

$$|\omega| = \alpha\,|z|\,(1 + \varepsilon\{\zeta\}); \quad \varepsilon\{\zeta\} \to 0 \quad \text{für} \quad |\zeta| \to \infty.$$

Im Falle der quasikonformen Abbildung gilt also der Satz, dass Kreise mit sehr grossem Radius in kreisähnliche Kurven übergehen, nur unter der Voraussetzung der obigen Integralbedingung, diese aber verlangt, dass unsere Transformation in der Umgebung des unendlich fernen Punktes nur sehr wenig von der Konformität abweicht.

Eine weitere Hauptfrage aus dem Gebiete der Funktionentheorie bezieht sich auf den Typus einer Riemannschen Fläche. *Eine solche Fläche nennt man bekanntlich vom hyperbolischen bzw. vom parabolischen Typus, wenn sich diese durch eine analytische Funktion auf das Innere des Einheitskreises bzw. auf die punktierte Ebene abbilden lässt.* Bekannt ist, dass der Typus einer Riemannschen Fläche konform invariant bleibt, aber es gilt weiter, dass auch die allgemeinere Transformation, nämlich die quasikonforme, den Typus einer Riemannschen Fläche ebenfalls nicht zu ändern vermag. Wäre das nicht der Fall, so liesse sich die punktierte Ebene zuerst eindeutig und konform auf ihre Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus abbilden. Diese Fläche könnte man quasikonform auf die zweite Riemannsche Fläche vom hyperbolischen Typus beziehen und diese schliesslich konform auf den Einheitskreis. Nach Aussage (4) aus Abschnitt 3 ergäbe sich dadurch eine eindeutige quasikonforme Abbildung der punktierten Ebene auf den Kreis $|w| < 1$. Im folgenden zeigen wir, dass eine derartige quasikonforme Abbildung nicht existiert. Wäre $w = w(z)$ eine solche Abbildung mit $D_{z/w} \leqq C$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w(0) = 0$ voraussetzen. Aus $|z| = r$ entsteht eine Kurve Γ_r, die für $r > r_0$ ausserhalb

eines Kreises $|w| = \varrho_0$ verläuft und diesen umschlingt, ihre Länge $L(r)$ ist also $\geqq 2\pi\varrho_0$, das heisst

$$2\pi\varrho_0 \leqq L(r) = \int_{\Gamma_r} |dw| = \int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right| r\, d\varphi .$$

Nach der *Schwarzschen Ungleichung* wird dann

$$4\pi^2\varrho_0^2 \leqq \int_0^{2\pi} r\, d\varphi \int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\, d\varphi = 2\pi r \int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\, d\varphi$$

und

$$2\pi\varrho_0^2 \frac{1}{r} \leqq \int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\, d\varphi .$$

Das gilt für alle $r \geqq r_0$. Integrieren wir von r_0 bis R, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (12)

$$2\pi\varrho_0^2 \log\frac{R}{r_0} \leqq \int_{r_0}^{R}\int_0^{2\pi} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\, dr\, d\varphi \leqq C \iint_{r_0<|z|<R} \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}\, d\sigma_z = C \iint_{\varrho_0<|w|<1} d\sigma_w \leqq C\pi ,$$

das ist aber nicht möglich, da R beliebig gross gewählt werden kann.

5. Schlussbetrachtungen

Neben der bedeutenden Entwicklung, welche die konforme Abbildung in unserem Jahrhundert erfuhr, hat sich besonders in den letzten zehn bis zwanzig Jahren auch die Theorie der quasikonformen Abbildungen in grösstem Ausmasse entfaltet. Dabei bestand allerdings nicht die Absicht, lediglich Probleme der konformen Abbildung summarisch zu übertragen, sondern man interessierte sich vielmehr für diejenigen Eigenschaften bestimmter Sätze aus der Funktionentheorie, die nicht durch die Analytizität bedingt waren und die also bei quasikonformen Abbildungen erhalten bleiben. Wir verzichten, um den Rahmen, in welchem wir unsere elementaren Betrachtungen halten, nicht zu weit zu ziehen, im folgenden auf nähere Beweise und begnügen uns mit wenigen Hinweisen, die uns die Entwicklung der letzten Jahre illustrieren sollen. So kennt man heute die Existenz einer *Koebeschen Konstante* bei quasikonformen Abbildungen [4] sowie den Einfluss dieser Abbildung auf Punktmengen einer bestimmten *Kapazität* und das Verhalten der *Robinschen Konstante* [7]. Erweitert man den Begriff der quasikonformen Abbildung auf *pseudoreguläre Funktionen*, die auf bestimmten Riemannschen Flächen vorgegeben sind (vgl. HERSCH [3]), so erhält man für diese Klasse die Sätze von PICARD, LINDELÖF, SCHWARZ, LANDAU, SCHOTTKY und anderen mehr.

Wie bei den konformen Abbildungen, so spielen auch bei den quasikonformen die Verzerrungssätze eine fundamentale Rolle. In einem vorwiegend elementaren Beispiel zeigt TEICHMÜLLER [9], *dass eine quasikonforme Abbildung des Einheitskreises* $|z| < 1$

auf sich, bei der alle Randpunkte fest bleiben, den Mittelpunkt um höchstens

$$2\,(\text{Supr. } D-1)$$

verschieben kann.

Die modernsten Untersuchungen, die vorwiegend auf TEICHMÜLLER [10] und AHLFORS [1] zurückgehen, beschäftigen sich mit den extremalen quasikonformen Abbildungen zweier Gebiete aufeinander. Man stellt sich hier die Frage, *ob unter den unendlich vielen quasikonformen Abbildungen von zwei bestimmten Gebieten, die nicht konform äquivalent sind, eine Limesfunktion existiere, bei der das Maximum des Dilatationsquotienten möglichst klein werde.* Dieses Problem, das keineswegs elementar ist, kann heute weitgehend als gelöst betrachtet werden, indem nämlich feststeht, dass unter bestimmten Voraussetzungen stets eine derartige Grenzfunktion existiert und dass dann bei dieser Extremalenabbildung interessanterweise ein *konstanter Dilatationsquotient* auftritt.

Auf ein anschauliches Beispiel angewendet, heisst das: *Falls das Rechteck* $R_z\,(0 < \Re\, z < a;\ 0 < \Im\, z < b)$ so auf das Rechteck $\mathfrak{R}_w\,(0 < \Re\, w < \alpha;\ 0 < \Im\, w < \beta)$ *abgebildet wird, dass die Ecken* $z = 0,\ a,\ a + i\,b,\ i\,b$ *in* $w = 0,\ \alpha,\ \alpha + i\,\beta,\ i\,\beta$ *übergehen und der Dilatationsquotient überall* $\leqq C$ *ist, dann gilt*

$$\frac{b}{a} \leqq C\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

Gleichheit gilt nur für eine affine Abbildung. H. P. KÜNZI, Zürich.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. AHLFORS, *On Quasiconformal Mappings*, J. Anal. Math. *3* (1953/54).

[2] H. GRÖTZSCH, *Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes*, Ber. Sächs. Akad. Leipzig *80* (1928).

[3] J. HERSCH, *Contribution à la théorie des fonctions pseudoanalytiques*, Comment. Math. Helv. *30* (1956).

[4] Y. JUVE, *Über gewisse Verzerrungseigenschaften konformer und quasikonformer Abbildungen*, Dissertation (Helsinki 1954).

[5] H. KÜNZI, *Entwicklung und Bedeutung der konformen Abbildung*, El. Math. *11*, H. 1 (1956).

[6] H. KÜNZI, *Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre*, Comment. Math. Helv. *29* (1955).

[7] A. PFLUGER, *Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität*, Ann. Inst. Fourier *2* (1951).

[8] O. TEICHMÜLLER, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung*, Dtsch. Math. *3* (1938).

[9] O. TEICHMÜLLER, *Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung*, Dtsch. Math. *7* (1942).

[10] O. TEICHMÜLLER, *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*, Preuss. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl. *22* (1939).

[11] H. WITTICH, *Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen*, Math. Z. *51* (1948).