Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

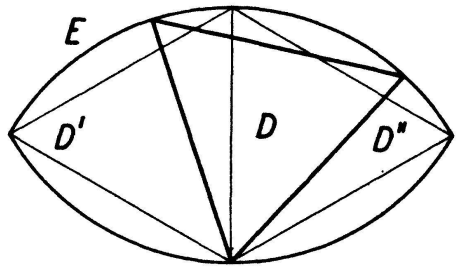
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[9] MÜLLER, E., *Vorlesungen über darstellende Geometrie.* Band I: *Die linearen Abbildungen* (speziell 3. Kapitel) (Wien 1923).
[10] STIEFEL, E., *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947).
[11] WUNDERLICH, W., *Zur Entbehrlichkeit des Satzes von Pohlke im Unterricht der darstellenden Geometrie,* El. Math. *10,* Heft 4 (1955).

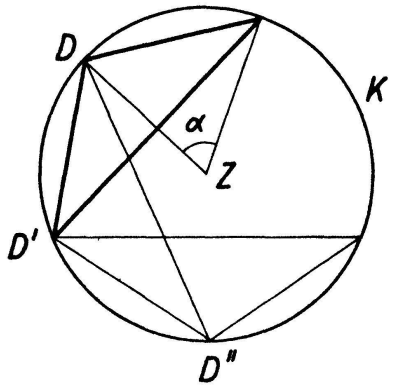
Ungelöste Probleme

Nr. 21. In der Ebene sei ein Dreieck D vorgelegt. Wir fragen, ob sich diesem D eine von seinem Umkreis K verschiedene Eilinie E so umschreiben lässt, dass D in E derart stetig herumgeführt werden kann, dass D nach einer vollen Umdrehung in der Ebene wieder mit sich zur Deckung kommt und hierbei dauernd der festen Eilinie E einbeschrieben bleibt.

1. Erstens sei angemerkt, dass das reguläre Dreieck die oben geschilderte Eigenschaft tatsächlich aufweist[1]). Sind nämlich D' und D'' zwei verschiedene, mit dem regulären Dreieck D kongruente Dreiecke, die eine Seite gemeinsam haben, und ist E das dem durch D' und D'' gebildeten Rhombus umschriebene Kreisbogenzweieck (vgl. Figur 1), so lässt sich D, das der Eilinie E einbeschrieben vorausgesetzt werden



Figur 1



Figur 2

darf, in der Tat in der vorgeschriebenen Weise in E herumführen; die beiden Scheitel der Kreisbogen von E spielen bei diesem Drehvorgang abwechselnd die Rolle des Drehzentrums. Im übrigen scheint das hier beschriebene Beispiel das einzige dieser Art zu sein.

2. Zweitens wollen wir feststellen, dass es beliebig viele Dreiecke D gibt, die unsere Eigenschaft sicher nicht aufweisen. Es sei D ein gleichschenkliges Dreieck. Der beim Mittelpunkt Z des Umkreises K von D gemessene Zentriwinkel des einem Schenkel zugeordneten Umkreisbogens sei a, und wir wollen voraussetzen, dass a mit π inkommensurabel ist. D kann dann unsere Eigenschaft nicht haben. In der Tat: Nehmen wir an, E sei eine D umschriebene von K verschiedene Eilinie der verlangten Art. Wir drehen nun D um den Umkreismittelpunkt Z der Reihe nach im positiven Sinn um die Winkel a, $2a$, $3a$, ... und bezeichnen die Drehbilder von D in gleicher Reihen-

[1]) Das nachfolgend angegebene Beispiel findet sich bei L. M. JAGLOM und W. G. BOLTJANSKI, *Konvexe Figuren* (Berlin 1956), S. 82.

folge mit $D', D'', D''', \ldots$. Es sei M die auf K liegende Menge aller Eckpunkte der Dreiecke $D, D', D'', \ldots$. Nach der elementargeometrischen Sachlage (vgl. Figur 2) haben zwei aufeinanderfolgende Dreiecke der Dreiecksfolge einen Schenkel gemeinsam, und hieraus folgt leicht, dass M auch auf E liegen muss. Da aber a/π irrational ist, liegt die Punktmenge M auf K überall dicht[2]), so dass E mit K identisch sein muss, im Widerspruch zu unserer Gegenannahme. Damit ist unsere sich auf D beziehende Behauptung bewiesen.

3. Sollte das reguläre Dreieck tatsächlich das einzige Dreieck mit der hier erörterten Eigenschaft sein, so wäre der folgende Satz richtig: *Lässt sich in einer Eilinie ein einbeschriebenes nichtreguläres Dreieck, sich selbst stets kongruent bleibend, stetig herumführen, so ist die Eilinie eine Kreislinie.*

Herrn W. Süss verdanken wir die Mitteilung[3]), dass diese Frage schon vor Dezennien aufgeworfen und beispielsweise in Gesprächen mit T. Kubota erörtert worden ist, ohne dass diese unseres Wissens bis heute beantwortet werden konnte. Unser Problem besteht also darin, den oben formulierten Satz entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

H. Hadwiger

Aufgaben

Aufgabe 281. a) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z de l'équation $x^2+y^3=z^4$ sont contenues dans les formules

$$x=a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1},$$

où a et b sont des nombres rationnels non nuls, tels que $a^2 \neq b^2$.

b) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z, t de l'équation $x^2+y^3+z^4=t^2$ sont contenues dans les formules

$$x=a\,(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(c^2-a^2-b^2)^3\,b^{-2},$$
$$z=\;(c^2-a^2-b^2)^2\,b^{-1}, \qquad t=(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}\,c,$$

où a, b, c sont des nombres rationnels non nuls, tels que $c^2 \neq a^2+b^2$.

A. Schinzel, Varsovie

Lösung: Es wird unmittelbar verifiziert, dass

$$x=a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1} \tag{1}$$

für alle a und b die Gleichung

$$x^2+y^3=z^4 \tag{2}$$

erfüllen. Wenn umgekehrt die von Null verschiedenen rationalen Zahlen x, y, z (2) erfüllen, so setze man $a=x\,y^{-2}\,z \neq 0$, $b=y^{-2}\,z^3 \neq 0$. Man erhält

$$b^2-a^2=y^{-4}\,z^2\,(z^4-x^2)=y^{-1}\,z^2 \neq 0$$

und daraus durch Kombination mit den Ausdrücken für a und b sofort (1).

Die zweite Aufgabe wird ganz analog gelöst, nur setzt man hier $a=x\,y^{-2}\,z$, $b=y^{-2}\,z^3$, $c=y^{-2}\,z\,t$, wobei $c^2-a^2-b^2=y^{-1}\,z^2$.

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

---

[2]) Nach einem bekannten Theorem von H. Weyl ist M auf K sogar gleichverteilt. Vgl. G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 1. Band (Berlin 1925), S. 71, Nr. 166.

[3]) Brief vom 20. September 1957 an den Unterzeichneten.