Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

As for the excluded case $r = p - 2$, it is clear from (10), (12) and (15) that

$$\Delta_{p-2} = \frac{1}{(p-1)!}\left\{-(p-2)!\,A_1\,w^{p-2} + (p-1)!\left(n + \frac{p}{2} - 1\right) w^{p-1}\right\},$$

which reduces to

$$\Delta_{p-2} = \left\{(n-1)\,w + \frac{p}{2}\,(w-1)\right\} w^{p-2}. \tag{17}$$

L. CARLITZ, Durham (N.C., USA)

Ungelöste Probleme

Nr. 27. Es bedeute n eine beliebige natürliche Zahl. Mit s_n werde die Summe der sämtlichen Teiler von n bezeichnet, mit p_n die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von natürlichen Zahlen, wobei die Reihenfolge der Summanden als unwesentlich gilt. Also

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 3,\ p_4 = 5,\ p_5 = 7,\ p_6 = 11,\ p_7 = 15,$$
$$p_8 = 22,\ p_9 = 30,\ p_{10} = 42,\ p_{11} = 56,\ p_{12} = 77 \text{ usw.}$$

Für die Darstellung von n als Summe von lauter *verschiedenen* natürlichen Zahlen spielen nach dem Pentagonalsatz EULERS die Pentagonalzahlen

$$\frac{1}{2}\,k\,(3\,k-1) \text{ mit } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\,k\,(3\,k+1) \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oder zusammengefasst

$$\frac{1}{2}\,l\,(3\,l-1) \text{ mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

eine ausgezeichnete Rolle. Es sind dies die Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ \ldots.$$

Zwischen s_n und den Pentagonalzahlen sowie zwischen p_n und den Pentagonalzahlen bestehen bekanntlich die Beziehungen (alternierend $++$ und $--$):

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} \cdots, \tag{1}$$

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} \cdots. \tag{2}$$

Dabei ist in (1) für eine Pentagonalzahl n für das dann formal auftretende letzte Glied s_0 die Zahl n selbst zu setzen. In (2) ist im gleichen Falle für p_0 der Wert 1 zu nehmen.

Unschwer erhält man die weitere merkwürdige Beziehung:

$$s_n = p_{n-1} + 2\,p_{n-2} - 5\,p_{n-5} - 7\,p_{n-7} + 12\,p_{n-12} + 15\,p_{n-15} \cdots. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) ergeben sich durch Anwenden von analytischen Hilfsmitteln. Insbesondere (3) legt die Frage nahe, wie sich dies rein arithmetisch begründen lässt, was doch zweifellos möglich sein sollte, da es sich um eine rein arithmetische Verflechtung der Pentagonalzahlen mit den Grössen s_n und p_n handelt.

L. LOCHER-ERNST

Aufgaben

Aufgabe 305. A convex (irregular) polygon P with n sides is subdivided into convex polygons by d diagonals which do not intersect in the interior of P. Let S_n denote the number of all such subdivisions, $d = 0, 1, 2, \ldots, n-3$. Here is a short table:

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$
$$S_n = 1,\ 3,\ 11,\ 45,\ 197,\ 903.$$

Show (1) and (2):

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} \binom{n-3}{k} 2^{n-3-k}, \tag{1}$$

$$S_n \equiv 1 \pmod{n} \quad (n = \text{prime}). \tag{2}$$

The problem is not new, but the form (1) of the solution seems to be new.

G. PÓLYA, Stanford University, USA

Solution. Denote the vertices of a polygon of $n+1$ sides by $0, 1, 2, \ldots, n$ and put $V_1 = 1$, $V_n = S_{n+1}$. By considering diagonals through the vertex 0, we get the recursion formulas

$$V_2 = V_1,$$
$$V_3 = 2\,V_2 + V_1^2,$$
$$V_4 = 2\,V_3 + 4\,V_1 V_2 + V_1^3,$$
$$V_5 = 2\,V_4 + 4\,V_1 V_3 + 4\,V_2^2 + 6\,V_1^2 V_2 + V_1^4,$$

and so on. Now put

$$g(x) = \sum_1^\infty V_n X^n, \qquad h(x) = x + \sum_2^\infty 2\,V_n X^n.$$

Then the above recurrences imply

$$g(x) - x = x \sum_1^\infty h^k(x) = \frac{x\,h(x)}{1 - h(x)}.$$

Since $h(x) = 2\,g(x) - x$, this yields

$$2\,g^2(x) - (1+x)\,g(x) + x = 0. \tag{*}$$

The problem is therefore equivalent to SCHRÖDER's second problem (see NETTO's *Lehrbuch der Combinatorik*, pp. 196–198).

It follows from (*) that

$$g(x) = \sum_1^\infty V_n X^n = \frac{1}{4}\,\{1 + x - (1 - 6\,x + x^2)^{1/2}\}.$$

Thus

$$V_n = -\frac{1}{4}\,P_n^{(-1/2)}(3),$$