Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 5

Artikel: Sur quelques polyèdres équivalents obtenus par un procédé en chaînes
Autor: Sydler, J.-P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20323

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

32. WILHELM FIEDLER, 1832–1912. Enseignement Math. Genève, 1913.
33. CARL FRIEDRICH GEISER, 1843–1934. Verhandlungen der S.N.G., 1934.
34. MARCEL GROSSMANN, 1878–1936, Verhandlungen der S.N.G., 1937.
35. JÉRÔME FRANEL, 1859–1939, Verhandlungen der S.N.G., 1940.
36. ERNST MEISSNER, 1883–1939, Verhandlungen der S.N.G., 1939.

Unter der Leitung von LOUIS KOLLROS wurden an der ETH die folgenden *Dissertationen* ausgearbeitet:

F. GONSETH: Etude synthétique et applications de l'apolarité. 1916.
W. MICHAEL: Zur Geometrie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtheorie. 1919.
H. JOBIN: Sur une généralisation de la transformation de Lie. 1921.
A. STAEMPFLI: Transformation par poloconiques et généralisation. 1924.
A. URECH: Polytopes réguliers de l'espace à n dim. et leurs groupes de rotation. 1925.
L. PAULI: Sur les polaires des courbes planes, des surfaces et des hypersurfaces algébriques. 1936.
A. KARAM: Sur les 85 problèmes de la «dépendance systématique» de Steiner. 1936.
J.-P. SYDLER: Des hyperquadriques et droites associées de l'espace à n dimensions. 1946.
H. RAMSER: Diskriminantenhyperfläche von quadratischen Formen. 1949.

Sur quelques polyèdres équivalents obtenus par un procédé en chaînes

I. Nommons chaîne orthogonale de plans une suite de plans $\pi_1, \ldots, \pi_n$ passant par un point P et tels que π_i et π_{i+1} soient orthogonaux ($i = 1, \ldots, n-1$). Si de plus π_n est perpendiculaire à π_1, la chaîne sera dite fermée.

Désignons par a_i la trace de π_i dans un plan π quelconque et par α_i l'angle π, π_i. Soit enfin $\beta_{i,\,i+1}$ l'angle des traces a_i, a_{i+1}. Comme π_i et π_{i+1} sont orthogonaux, on a

$$\operatorname{cotg}\alpha_i \operatorname{cotg}\alpha_{i+1} = \cos\beta_{i,\,i+1}. \tag{1}$$

Par conséquent, pour une chaîne orthogonale à n éléments, il existera les relations suivantes, selon que n est pair ou impair (nous supposerons qu'aucun des angles α_i ou $\beta_{i,\,i+1}$ n'est droit):

a) n pair:

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha_n = \frac{\cos\beta_{1,2}\cos\beta_{3,4}\cdots\cos\beta_{n-3,\,n-2}\cos\beta_{n-1,\,n}}{\cos\beta_{2,3}\cos\beta_{4,5}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}}; \tag{2}$$

b) n impair:

$$\frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\operatorname{cotg}\alpha_n} = \frac{\cos\beta_{1,2}\cos\beta_{3,4}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}}{\cos\beta_{2,3}\cos\beta_{4,5}\cdots\cos\beta_{n-1,\,n}}. \tag{3}$$

Conséquences

I. A) Considérons une chaîne fermée paire (n pair). Comme

$$\operatorname{cotg}\alpha_n \operatorname{cotg}\alpha_1 = \cos\beta_{n,1},$$

on a donc

$$\cos\beta_{1,2}\cos\beta_{3,4}\cdots\cos\beta_{n-1,\,n} = \cos\beta_{n,1}\cos\beta_{2,3}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}. \tag{4}$$

I. B) Pour une chaîne fermée impaire, on a

$$\operatorname{cotg}^2\alpha_i = \frac{\cos\beta_{i,\,i+1}\cdots\cos\beta_{i-3,\,i-2}\cos\beta_{i-1,\,i}}{\cos\beta_{i+1,\,i+2}\cdots\cos\beta_{i-2,\,i-1}}.$$

I. C) Considérons deux chaînes $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ et $(\pi_1', \ldots, \pi_n')$ telles que les traces a_i et a_i' de π_i et π_i' dans π soient parallèles ($i = 1, \ldots,$ n) (figure 1). Nous dirons que les deux chaînes sont parallèles.

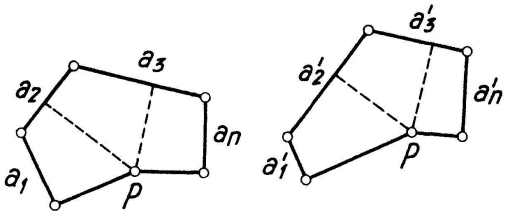

Figure 1

Si n est pair et si la chaîne $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ est fermée, alors la chaîne $(\pi_1', \ldots, \pi_n')$ est également fermée.

En effet, en vertu de (2), on a $\operatorname{cotg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha_n = \operatorname{cotg}\alpha_1' \operatorname{cotg}\alpha_n'$ et comme $\beta_{n,1} = \beta_{n,1}'$ et que $\operatorname{cotg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha_n = \cos\beta_{n,1}$, on a bien $\operatorname{cotg}\alpha_1' \operatorname{cotg}\alpha_n' = \cos\beta_{n,1}'$.

Cette propriété peut s'énoncer également ainsi:

Si l'on a deux chaînes parallèles impaires $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ et $(\pi_1', \ldots, \pi_n')$ (n impair), le plan π_{n+1} perpendiculaire à π_1 et π_n et le plan π_{n+1}' perpendiculaire à π_1' et π_n' ont leurs traces parallèles.

En nommant π_{n+1} fermeture de la chaîne $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, on peut dire plus brièvement:

Deux chaînes parallèles impaires ont des fermetures parallèles.

I. D) Si l'on se donne des valeurs $\beta_{1,2}, \ldots, \beta_{n-1,\,n}$, donc aussi β_n et si l'on ne distingue pas deux chaînes symétriques par rapport à la normale à π par P, on a les propriétés suivantes:

Si n est impair, il existe une et une seule chaîne fermée ayant les angles $\beta_{i,\,i+1}$ comme angles de base.

Si n est pair, il n'en existe aucune ou il en existe une simple infinité, suivant que les β ne vérifient pas ou vérifient la relation (4).

I. E) Considérons la chaîne orthogonale $(\pi_1, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1}, \ldots, \pi_{2n})$ telle que a_i et a_{n+i} soient parallèles ($i = 1, \ldots, n$).

Si n est impair, cette chaîne est fermée.

En effet, comme $\beta_{i,\,i+1} = \beta_{n+i,\,n+i+1}$, on a

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha_{2n} = \frac{\cos\beta_{1,2}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}\cos\beta_{n,\,n+1}\cdots\cos\beta_{2n-3,\,2n-2}\cos\beta_{2n-1,\,2n}}{\cos\beta_{2,3}\cdots\cos\beta_{n-1,\,n}\cos\beta_{n+1,\,n+2}\cdots\cos\beta_{2n-2,\,2n-1}}$$

$$= \frac{\cos\beta_{1,2}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}\cos\beta_{n,1}\cdots\cos\beta_{n-3,\,n-2}\cos\beta_{n-1,\,n}}{\cos\beta_{2,3}\cdots\cos\beta_{n-1,\,n}\cos\beta_{1,2}\cdots\cos\beta_{n-2,\,n-1}}$$

$$= \cos\beta_{n,1} = \cos\beta_{2n,1} = \operatorname{cotg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\alpha_{2n}.$$

Nous dirons qu'une telle chaîne est *autoparallèle* (figure 2).

I. F) Etant donnée une chaîne orthogonale $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, soit π_0 le plan perpendiculaire aux chaînons π_i et π_j (figure 3). Nous dirons que la chaîne $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ peut se décomposer en $(\pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_i, \pi_0, \pi_j, \pi_{j+1}, \ldots, \pi_n)$ et en $(\pi_0, \pi_i, \pi_{i+1}, \ldots, \pi_{j-1}, \pi_j)$ ou qu'elle est la somme de ces deux chaînes.

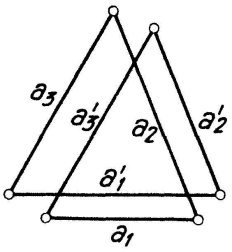

Figure 2

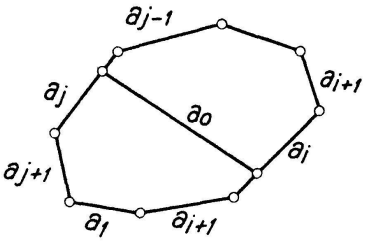

Figure 3

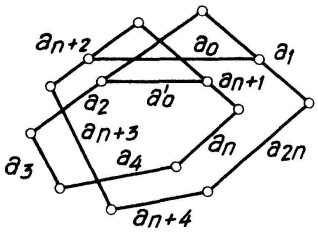

Figure 4

Deux chaînes parallèles fermées paires se laissent décomposer en chaînes parallèles fermées à 6 chaînons.

En effet, le plan π_0 perpendiculaire à π_1 et π_5 ayant sa trace parallèle au plan π^0 perpendiculaire à π_1' et π_5', la première chaîne $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ se décompose en $(\pi_1, \ldots, \pi_5, \pi_0)$ et $(\pi_1, \pi_0, \pi_5, \pi_6, \ldots, \pi_n)$ et la seconde en $(\pi_1', \ldots, \pi_5', \pi_0')$ et $(\pi_1', \pi_0', \pi_5', \pi_6', \ldots, \pi_n')$; en répétant la construction pour les chaînes parallèles à $(n-2)$ chaînons on obtient le résultat cherché.

I. G) *Une chaîne autoparallèle se laisse décomposer en une chaîne autoparallèle à 6 chaînons et en couples de chaînes parallèles à 6 chaînons.*

En effet, soit π_0 le plan perpendiculaire à π_1 et π_{n-2} et soit π_0' le plan perpendiculaire à π_2 et π_{n+1} (figure 4). π_0 et π_0' ont leurs traces parallèles; la chaîne $(\pi_1, \pi_2, \pi_0', \pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \pi_0)$ est autoparallèle. La chaîne $(\pi_1, \ldots, \pi_{2n})$ se décompose donc en $(\pi_1, \pi_2, \pi_0', \pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \pi_0)$ et en les deux chaînes parallèles $(\pi_0', \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1})$ et $(\pi_0, \pi_{n+2}, \pi_{n+3}, \ldots, \pi_{2n}, \pi_1)$, qui se laissent décomposer en chaînes parallèles à 6 chaînons.

I. H) Etant donnée une chaîne $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ d'angles $\beta_{12}, \beta_{23}, \beta_{34}$, considérons la chaîne $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ telle que

$$\cos\beta_{45} = \frac{\cos\beta_{12}\cos\beta_{34}}{\cos\beta_{23}}.$$

Alors

$$\boxed{\operatorname{cotg}\pi_1 = \operatorname{cotg}\pi_5.}$$

Nous dirons que la chaîne à 5 chaînons $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ pour laquelle les dièdres π_1 et π_5 sont égaux est une *chaîne semi-fermée*. On voit que:

a) Toute chaîne parallèle à une chaîne semi-fermée est semi-fermée.

b) *Deux chaînes parallèles fermées à 6 chaînons se laissent décomposer en deux couples de chaînes semi-fermées parallèles.*

En effet, considérons les plans π_7 et π_7' perpendiculaires à π_1 et π_1', et tels que $\cos\beta_{71}\cos\beta_{23} = \cos\beta_{12}\cos\beta_{34}$. Comme $\cos\beta_{12}\cos\beta_{34}\cos\beta_{56} = \cos\beta_{23}\cos\beta_{45}\cos\beta_{61}$, on a $\cos\beta_{71}\cos\beta_{23}\cos\beta_{56} = \cos\beta_{23}\cos\beta_{45}\cos\beta_{61}$ donc $\cos\beta_{71}\cos\beta_{56} = \cos\beta_{16}\cos\beta_{54}$; par conséquent les deux chaînes données se décomposent dans les deux couples de

chaînes semi-fermées parallèles $(\pi_7, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ et $(\pi_7', \pi_1', \pi_2', \pi_3', \pi_4')$, $(\pi_7, \pi_1, \pi_6, \pi_5, \pi_4)$ et $(\pi_7', \pi_1', \pi_6', \pi_5', \pi_4')$.

Disons que deux *chaînes semi-fermées* sont *antiparallèles* lorsque

$$\beta_{12} = \beta_{12}', \quad \beta_{34} = \beta_{34}', \quad \beta_{23} = \beta_{45}', \quad \beta_{45} = \beta_{23}'.$$

c) *Une chaîne autoparallèle à 6 chaînons se laisse décomposer en deux chaînes semi-fermées antiparallèles.*

En effet, en menant le plan π_4 perpendiculaire à π_1' et tel que $\cos\beta_{41} \cos\beta_{23} = \cos\beta_{13} \cos\beta_{21}$, on peut décomposer $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_1', \pi_2', \pi_3')$ en $(\pi_4, \pi_1', \pi_2', \pi_3', \pi_1)$ et $(\pi_4, \pi_1', \pi_3, \pi_2, \pi_1)$, chaînes semi-fermées antiparallèles.

Par conséquent:

I. J) *Deux chaînes orthogonales fermées paires quelconques se laissent décomposer en chaînes semi-fermées deux à deux parallèles.*

Une chaîne autoparallèle se laisse décomposer en couples de chaînes semi-fermées deux à deux parallèles ou antiparallèles.

II. Soit φ_i le plan mené par P perpendiculairement à π et π_i (rappelons encore que nous avons supposé que π_i n'est pas perpendiculaire à π).

Nommons $P_{i,i+1}$ le polyèdre déterminé par les plans $\pi, \pi_i, \pi_{i+1}, \varphi_i, \varphi_{i+1}$ (figure 5) et désignons par $R_{i,i+1}$ le polyèdre semblable: $R_{i,i+1} = \operatorname{tg}\beta_{i,i+1} P_{i,i+1}$.

Etant donné une chaîne orthogonale fermée paire $(\pi_1, \ldots, \pi_n, \pi_{n+1} = \pi_1)$, nous pouvons lui faire correspondre un polyèdre bien déterminé:

$$P(\pi_1, \ldots, \pi_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} R_{i,i+1}.$$

Les polyèdres $R_{i-1,i}$ et $R_{i,i+1}$ ont chacun un dièdre π_i; on vérifie que les longueurs de ces dièdres sont égales. On peut donc dire que le polyèdre $(R_{i-1,i} - R_{i,i+1})$ a un dièdre π_i dont la longueur algébrique est nulle. Le polyèdre $P(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ (n pair) a donc des dièdres π_i dont la longueur est nulle, des dièdres droits (le long des intersections de π_i et de π_{i+1} et le long des intersections de π_i et de φ_i), enfin (le long des intersections de φ_i et φ_{i+1}) des dièdres verticaux de valeurs $\pi - \beta_{i,i+1}$ et de longueurs $K \operatorname{tg}\beta_{i,i+1}$ (K étant la distance de P à π).

Si l'on considère dès lors une deuxième chaîne paire fermée $(\pi_1', \ldots, \pi_n')$ parallèle à $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, on peut définir un second polyèdre $P(\pi_1', \ldots, \pi_n')$. Le polyèdre $P_1 = P(\pi_1, \ldots, \pi_n) - P(\pi_1', \ldots, \pi_n')$ n'aura donc que des dièdres droits ou des dièdres dont la longueur algébrique est nulle.

Si l'on considère une chaîne autoparallèle $(\pi_1, \ldots, \pi_{2n})$ (n impair), on peut définir de même un polyèdre

$$P_2 = \sum_{1}^{2n} (-1)^{i+1} R_{i,i+1}$$

dont tous les dièdres sont droits ou ont des longueurs algébriques nulles.

III. Deux polyèdres sont équivalents lorsqu'on peut les décomposer en polyèdres deux à deux congruents. DEHN a établi des conditions nécessaires pour cette équi-

valence. Ces conditions sont remplies en particulier par des polyèdres dont tous les dièdres sont rationnels en π. Les polyèdres P_1 et P_2 remplissent donc toutes les conditions nécessaires pour être équivalents à un cube. Nous nous proposons de démontrer que, pour P_1 et P_2, ces conditions sont effectivement suffisantes.

A cet effet, remarquons tout d'abord qu'on peut faire correspondre une somme ou une différence de deux polyèdres P à une somme ou une différence de chaînes. Par conséquent, d'après les résultats du chapitre I, nous pouvons affirmer que:

Si les polyèdres correspondant à deux chaînes semi-fermées parallèles ou antiparallèles sont équivalents, alors les polyèdres correspondant à deux chaînes fermées paires parallèles sont équivalents et le polyèdre correspondant à une chaîne autoparallèle est équivalent à un cube. Il suffira, pour démontrer le cas général, de démontrer que:

Les polyèdres correspondant à deux chaînes semi-fermées parallèles ou antiparallèles sont équivalents.

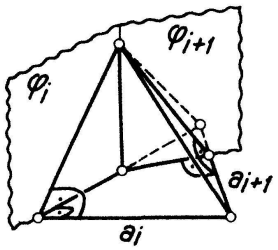

Figure 5

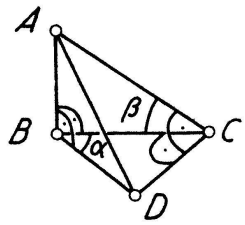

Figure 6

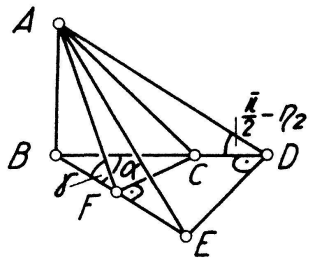

Figure 7

IV. Pour effectuer cette démonstration, établissons d'abord un lemme fondamental.

Désignons par $(\alpha, \beta; \zeta)$ un tétraèdre $ABCD$ tel que: $AB \perp BCD$; $DC \perp CBA$; $\alpha =$ dièdre AB; $\beta =$ dièdre CD; $\zeta =$ dièdre AD; $\overline{AB} = \operatorname{cotg}\alpha$; $\overline{CD} = \operatorname{cotg}\beta$ (figure 6). On vérifiera facilement les relations suivantes:

$$\cos\zeta = \sin\alpha \sin\beta \quad \text{et} \quad \overline{AD} = \operatorname{tg}\zeta.$$

Considérons les 4 tétraèdres trirectangles

$$(\alpha, \gamma; \eta_1); \quad (\beta, \gamma; \eta_2); \quad \left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \zeta_1\right); \quad \left(\beta, \frac{\pi}{2} - \eta_1; \zeta_2\right).$$

$$\cos\zeta_1 = \sin\alpha \cos\eta_2 = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin\beta \cos\eta_1 = \cos\zeta_2. \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta.$$

Lemme fondamental:

$$\boxed{(\alpha, \gamma; \eta_1) - (\beta, \gamma; \eta_2) \sim \left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \zeta\right) - \left(\beta, \frac{\pi}{2} - \eta_1; \zeta\right).}$$

Soient

$$ACDEF = \left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \zeta\right) - (\alpha, \gamma; \eta_1)$$

et

$$A'C'D'E'F' = \left(\beta, \frac{\pi}{2} - \eta_1; \zeta\right) - (\beta, \gamma; \eta_2)$$

les deux polyèdres obtenus à partir de ces tétraèdres ($FC \perp EF$; $F'C' \perp E'F'$) (figure 7). Les points C, D, E et F étant sur un cercle, le polyèdre $ACDEF$ est inscrit dans une sphère de centre M et de rayon r_1. De même, le polyèdre $A'C'D'E'F'$ est inscrit dans une sphère de centre M' et de rayon r_2. Un simple calcul montre que:
1°) les deux polyèdres ont même volume

2°) $$r_1 = r_2 = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{2}, \qquad \cos\varrho = \cos\zeta \sin\gamma = \cos\eta_1 \cos\eta_2.$$

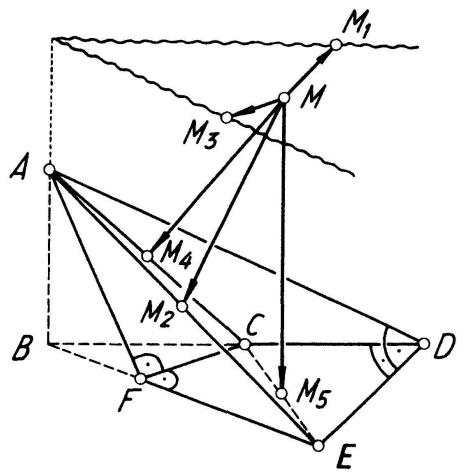

Figure 8

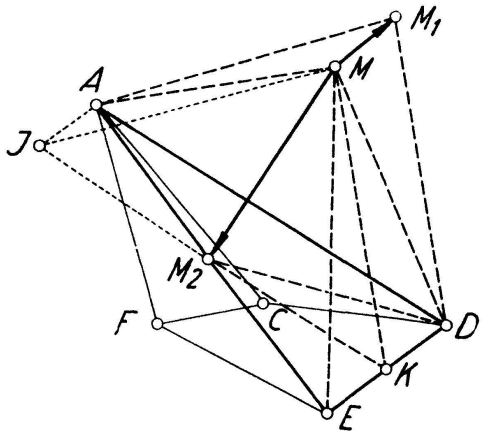

Figure 9

Soient encore: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 les projections de M sur les plans ACD, ADE, AEF, AFC et $CDEF$ (figure 8). On voit que $\overline{MM_1} = \overline{DE}/2 = \operatorname{tg}\eta_2/2$; M_2 est au milieu de AE; $\overline{MM_3} = \overline{CF}/2 = \operatorname{cotg}\gamma/2$; M_4 est au milieu de AC; M_5 est au milieu de CE. Nous pouvons effectuer la décomposition suivante:

$$\begin{aligned} ACDEF \sim\ & MM_5DE + MM_5EF + MM_5FC + MM_5CD \\ & + MM_4AF + MM_4FC + MM_3FE + MM_3AF \\ & - MM_3AE - MM_2AD - MM_2DE + MM_1CD \\ & + MM_1AC - MM_1AD. \end{aligned}$$

Or: $MM_1AD + MM_2AD + MM_2DE \sim 0$ (figure 9; les tétraèdres MM_2JA et MM_2KE sont congruents; la somme est équivalente au prisme MM_1JAKD).

De même

$$MM_5DE + MM_1CD + MM_5CD \sim 0,$$

$$MM_4CF + MM_4AF + MM_3AF \sim 0,$$

$$MM_5CF + MM_5EF + MM_3EF \sim 0.$$

Par conséquent

$$ACDEF \sim MM_1AC - MM_3AE.$$

Or,

$$MM_1AC \sim MM_1M_4A + MM_1M_4C$$

et comme

$$\overline{MM_1} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\eta_2, \qquad \overline{AM_4} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\eta_1, \qquad \overline{AM} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varrho,$$

on a

$$MM_1M_4A \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \varrho\right),$$

$$MM_1AC \sim \left(\frac{\pi}{2} - \eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \varrho\right).$$

De même

$$MM_3AE \sim \left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \zeta; \varrho\right),$$

donc

$$ACDEF \sim \left(\frac{\pi}{2} - \eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \varrho\right) - \left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \zeta; \varrho\right).$$

On trouve de même

$$A'C'D'E'F' \sim \left(\frac{\pi}{2} - \eta_2, \frac{\pi}{2} - \eta_1; \varrho\right) - \left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \zeta; \varrho\right)$$

et par conséquent $ACDEF \sim A'C'D'E'F'$.

Nous pouvons donc écrire:

$$\boxed{\begin{aligned}(\alpha, \gamma; \eta_1) - \left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \zeta\right) &\sim (\beta, \gamma; \eta_2) - \left(\beta, \frac{\pi}{2} - \eta_1; \zeta\right)\\ &\sim \left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \zeta; \varrho\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_2; \varrho\right).\end{aligned}}$$

Comme conséquence, nous avons le théorème suivant:

$$\boxed{\begin{aligned}&(\alpha, \gamma; \nu_1) - (\beta, \gamma; \nu_2) - (\alpha, \delta; \nu_3) + (\beta, \delta; \nu_4)\\ &\qquad \sim \left(\frac{\pi}{2} - \nu_2, \frac{\pi}{2} - \nu_3; \sigma\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \nu_1, \frac{\pi}{2} - \nu_4; \sigma\right).\end{aligned}}$$

En effet, comme

$$\cos\varrho^1 = \cos\nu_1 \sin\beta = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin\alpha \cos\nu_2$$

et

$$\cos\varrho^2 = \cos\nu_3 \sin\beta = \sin\alpha \sin\beta \sin\delta = \sin\alpha \cos\nu_4,$$

on a en appliquant plusieurs fois le lemme fondamental:

$$\{(\alpha, \gamma; \nu_1) - (\beta, \gamma; \nu_2)\} - \{(\alpha, \delta; \nu_3) - (\beta, \delta; \nu_4)\}$$

$$\sim \left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \nu_1, \beta; \varrho^1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \nu_2, \alpha; \varrho^1\right)\right\} - \left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \nu_3, \beta; \varrho^2\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \nu_4, \alpha; \varrho^2\right)\right\}$$

$$+ (\delta, \beta; \nu^4) - (\delta, \alpha; \nu^3) - (\delta, \beta; \nu^4) + (\delta, \alpha; \nu^3)$$

$$\sim \left(\delta, \frac{\pi}{2} - \varrho^1; \sigma^1\right) - \left(\delta, \frac{\pi}{2} - \varrho^1; \sigma^2\right) - \left(\delta, \frac{\pi}{2} - \varrho^2; \sigma^3\right) + \left(\delta, \frac{\pi}{2} - \varrho^2; \sigma^4\right)$$

$$- \left(\frac{\pi}{2} - \nu_1, \frac{\pi}{2} - \nu_4; \sigma^1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \nu_2, \frac{\pi}{2} - \nu_3; \sigma^2\right)$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2} - \nu_3, \frac{\pi}{2} - \nu_4; \sigma^3\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \nu_4, \frac{\pi}{2} - \nu_3; \sigma^4\right).$$

Par conséquent

$$\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma; \quad \sigma^3 = \sigma^4.$$

Donc

$$(\alpha, \gamma; \nu_1) - (\beta, \gamma; \nu_2) - (\alpha, \delta; \nu_3) + (\beta, \delta; \nu_4)$$

$$\sim \left(\frac{\pi}{2} - \nu_2, \frac{\pi}{2} - \nu_3; \sigma\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \nu_1, \frac{\pi}{2} - \nu_4; \sigma\right),$$

ce qu'il fallait démontrer. De même, on établit que

$$(\mu_1, \alpha; \gamma) - (\mu_2, \alpha; \delta) - (\mu_3, \beta; \gamma) + (\mu_4, \beta; \delta) \sim (\mu_1, \mu_4; \varrho) - (\mu_2, \mu_3; \varrho).$$

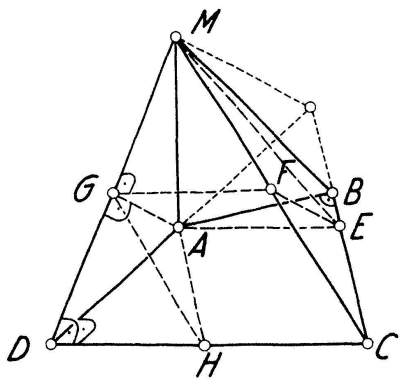

Figure 10

Considérons le polyèdre $P(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ correspondant à une chaîne semi-fermée d'angles $\beta_{i,\, i+1} = \alpha, \beta, \gamma, \delta$, donc telle que $\cos\alpha \cos\gamma = \cos\beta \cos\delta$. Soit $MABCD$ le polyèdre $R(\pi_1, \pi_2)$ déterminé par les deux premiers plans. Le plan par AM parallèle à DC coupe BC en E. Le plan par AE perpendiculaire à MD coupe MC et MD en F et G, $AEFG$ étant un rectangle. Le plan par AG parallèle à BC coupe DC en H. $FGEACH$ est un prisme (figure 10). Désignons par ε_1 le dièdre ME du tétraèdre

$MABE$, par ξ^1 le dièdre AG du tétraèdre $AGDH$. On a donc, en posant $\alpha' = \pi/2 - \alpha$,

$$R_{1,2} \sim MABE + MGAEF + AGDH \sim (\alpha', \pi_2; \varepsilon_1) + (\xi_1, \pi_1; \pi_2) + MGAEF$$
$$\sim (\alpha', \pi_2; \varepsilon_1) + (\xi_1, \pi_1; \pi_2) - \left(\xi_1, \frac{\pi}{2} - \pi_1; \varepsilon_1\right).$$

Effectuons la même décomposition pour les polyèdres R_{23}, R_{34}, R_{41}, mais en considérant les plans dans l'ordre 1,2 pour R_{12}, 3,2 pour R_{23}, 3,4 pour R_{34} et 1,4 pour R_{41}. On aura alors

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim\ & (\alpha', \pi_2; \varepsilon_1) + (\xi^1, \pi_1; \pi_2) - \left(\xi^1, \frac{\pi}{2} - \pi_1; \varepsilon_1\right) \\ & - (\beta', \pi_2; \varepsilon_2) - (\xi^2, \pi_3; \pi_2) + \left(\xi^2, \frac{\pi}{2} - \pi_3; \varepsilon_2\right) \\ & + (\gamma', \pi_4; \varepsilon_3) + (\xi^3, \pi_3; \pi_4) - \left(\xi^3, \frac{\pi}{2} - \pi_3; \varepsilon_3\right) \\ & - (\delta', \pi_4; \varepsilon_4) - (\xi^4, \pi_1; \pi_4) + \left(\xi^4, \frac{\pi}{2} - \pi_1; \varepsilon_4\right). \end{aligned}$$

D'après le théorème 1, la 2e colonne est équivalente à

$$(\xi^1, \xi^3; \varrho) - (\xi^2, \xi^4; \varrho).$$

D'autre part,

$$(\alpha', \pi_2; \varepsilon_1) - \left(\xi^1, \frac{\pi}{2} - \pi_1; \varepsilon_1\right) \sim -\left(\omega_1^1, \omega_3^1; \frac{\pi}{2} - \alpha'\right) - \left(\omega_2^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \pi_2\right)$$
$$+ \left(\omega_1^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \xi^1\right) + (\omega_2^1, \omega_3^1; \pi_1).$$

Donc

$$\begin{aligned} & P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - (\xi^1, \xi^3; \varrho) + (\xi^2, \xi^4; \varrho) \\ & \sim -\left(\omega_1^1, \omega_3^1; \frac{\pi}{2} - \alpha'\right) - \left(\omega_2^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \pi_2\right) + \left(\omega_1^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \xi^1\right) + (\omega_2^1, \omega_3^1; \pi_1) \\ & + \left(\omega_1^2, \omega_3^2; \frac{\pi}{2} - \beta'\right) + \left(\omega_2^2, \omega_4^2; \frac{\pi}{2} - \pi_2\right) - \left(\omega_1^2, \omega_4^2; \frac{\pi}{2} - \xi^2\right) - (\omega_2^2, \omega_3^2; \pi_3) \\ & - \left(\omega_1^3, \omega_3^3; \frac{\pi}{2} - \gamma'\right) - \left(\omega_2^3, \omega_4^3; \frac{\pi}{2} - \pi_4\right) + \left(\omega_1^3, \omega_4^3; \frac{\pi}{2} - \xi^3\right) + (\omega_2^3, \omega_3^3; \pi_3) \\ & + \left(\omega_1^4, \omega_3^4; \frac{\pi}{2} - \delta'\right) + \left(\omega_2^4, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \pi_4\right) - \left(\omega_1^4, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \xi^4\right) - (\omega_2^4, \omega_3^4; \pi_1). \end{aligned}$$

Choisissons

$$\omega_4^1 = \omega_4^2; \quad \omega_1^2 = \omega_1^3; \quad \omega_4^4 = \omega_4^3.$$

Comme

$$\sin\xi^1 \sin\xi^3 = \sin\xi^2 \sin\xi^4 = \sin\omega_1^1 \sin\omega_4^1 \sin\omega_1^3 \sin\omega_4^3 = \sin\omega_1^2 \sin\omega_4^2 \sin\omega_1^4 \sin\omega_4^4,$$

alors

$$\omega_1^1 = \omega_1^4.$$

A cause de la 2e colonne, on a de plus

$$\omega_2^1 = \omega_2^2; \quad \omega_2^3 = \omega_2^4.$$

Donc:

$$\begin{aligned}
&P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - (\xi^1, \xi^3; \varrho) + (\xi^2, \xi^4; \varrho) \\
&\sim -\left(\omega_1^1, \omega_3^1; \frac{\pi}{2} - \alpha'\right) - \left(\omega_2^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \pi_2\right) + \left(\omega_1^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \xi^1\right) + (\omega_2^1, \omega_3^1; \pi_1) \\
&\quad + \left(\omega_1^2, \omega_3^2; \frac{\pi}{2} - \beta'\right) + \left(\omega_2^1, \omega_4^1; \frac{\pi}{2} - \pi_2\right) - \left(\omega_1^2, \omega_4^1, \frac{\pi}{2} - \xi^2\right) - (\omega_2^1, \omega_3^2; \pi_3) \\
&\quad - \left(\omega_1^2, \omega_3^3; \frac{\pi}{2} - \gamma'\right) - \left(\omega_2^3, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \pi_4\right) + \left(\omega_1^2, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \xi^3\right) + (\omega_2^3, \omega_3^3; \pi_3) \\
&\quad + \left(\omega_1^1, \omega_3^4; \frac{\pi}{2} - \delta'\right) + \left(\omega_2^3, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \pi_4\right) - \left(\omega_1^1, \omega_4^4; \frac{\pi}{2} - \xi^4\right) - (\omega_2^3, \omega_3^4; \pi_1).
\end{aligned}$$

La 3e colonne étant équivalente à $(\xi^2, \xi^4; \varrho) - (\xi^1, \xi^3; \varrho)$, on a

$$\begin{aligned}
&P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\
&\sim -\left(\omega_1^1, \omega_3^1; \frac{\pi}{2} - \alpha'\right) + \left(\omega_1^2, \omega_3^2; \frac{\pi}{2} - \beta'\right) - \left(\omega_1^2, \omega_3^3; \frac{\pi}{2} - \gamma'\right) + \left(\omega_1^1, \omega_3^4; \frac{\pi}{2} - \delta'\right) \\
&\quad + (\omega_2^1, \omega_3^1; \pi_1) - (\omega_2^1, \omega_3^2; \pi_3) + (\omega_2^3, \omega_3^3; \pi_3) - (\omega_2^3, \omega_3^4; \pi_1) \\
&\sim \quad (\omega_2^1, \alpha'; \sigma^1) - (\omega_2^1, \beta'; \sigma^2) + (\omega_2^3, \gamma'; \sigma^3) - (\omega_2^3, \delta'; \sigma^4) \\
&\quad - \left(\omega_1^1; \frac{\pi}{2} - \pi_1; \sigma^1\right) + \left(\omega_1^2, \frac{\pi}{2} - \pi_3; \sigma^2\right) - \left(\omega_1^2, \frac{\pi}{2} - \pi_3; \sigma^3\right) + \left(\omega_1^1, \frac{\pi}{2} - \pi_1; \sigma^4\right).
\end{aligned}$$

A cause de la dernière ligne, on voit que $\sigma^1 = \sigma^4$, $\sigma^2 = \sigma^3$, donc

$$P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim (\omega_2^1, \alpha'; \sigma^1) - (\omega_2^1, \beta'; \sigma^2) + (\omega_2^3, \gamma'; \sigma^2) - (\omega_2^3, \delta'; \sigma^1),$$

$$\boxed{P(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sim (\alpha', \gamma'; \lambda) - (\beta', \delta'; \lambda).}$$

Le résultat étant indépendant de la grandeur du dièdre π_1, on en déduit le théorème fondamental suivant:

Théorème. *Les polyèdres correspondant à deux chaînes semi-fermées parallèles sont équivalents.*

Et comme de plus

$$(\delta', \beta'; \lambda) \sim (\beta', \delta'; \lambda),$$

les polyèdres correspondant à deux chaînes semi-fermées antiparallèles sont équivalents.

Par conséquent, comme nous l'avons vu:

Les polyèdres correspondant à deux chaînes fermées, paires, parallèles quelconques sont équivalents.

Le polyèdre correspondant à une chaîne autoparallèle est équivalent à un cube.

J.-P. SYDLER