Einblick in den Aufbau und die Funktionsweise moderner Rechenautomaten

Autor(en): **Prokop, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **14 (1959)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20325

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

connection with the preceding theory.' Es ist wohl anzunehmen, dass er $\pi^4 = 97{,}409091034\ldots$ berechnet und gesehen hat, dass sich dies sehr nahe durch $97{,}409090909\ldots = 2143/22$ darstellen lässt. Weiter ergibt sich $2143 = 22 \cdot 9^2 + 19^2$ und damit der von RAMANUJAN angegebene und für seine Konstruktion benutzte Näherungswert $(9^2 + 19^2/22)^{1/4}$ für π. In anderer Form findet sich diese Näherung bei REICHENBÄCHER [6].

Eine von CORDILHA [7] angegebene Konstruktion benötigt in einer Gitterebene ebenfalls nur einen Kreisbogen, wenn man den Radius r des gegebenen Kreises gleich 4 Gittereinheiten wählt. Ist OM auf der x-Achse gleich $2^1/_2 r$ und A der Punkt mit den Koordinaten $-{}^5/_4 r$, ${}^1/_2 r$, so liefert $OM + MA$ den Kreisumfang mit einem relativen Fehler von weniger als 1/5000000.

Auch eine von VIETA [8] benutzte Näherung lässt sich in dieser Weise erhalten, wenn man den Radius r gleich 5 Gittereinheiten wählt. Es wird jetzt $OM = 3^3/_5 r$ gesetzt, und die Koordinaten von A sind ${}^6/_5 r$, ${}^6/_5 r$. $OM + MA$ ist dann der Kreisumfang mit einem relativen Fehler von weniger als 1/65000. Mit $OM = {}^9/_5 r$ und $A = ({}^3/_5 r, {}^3/_5 r)$ ergibt sich hier auch der halbe Kreisumfang aus den Gitterpunkten mit einem Kreisbogen.

Da aber bei diesen Konstruktionen der Punkt A nicht auf der y-Achse liegt, ist die vorher angegebene doch bequemer und einfacher zu merken. P. FINSLER

LITERATURVERZEICHNIS

[1] TH. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen* (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911), S. 310.
[2] P. FINSLER, *Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen*, Comment. math. helv. *10*, 250 (1938).
[3] V. G. CAVALLARO, G. Mat. Battaglini *72*, 86 (1934).
[4] C. SCHOR, Rassegna Mat. Fis. *5*, 63 (1927).
[5] S. RAMANUJAN, Quart. J. Math. *45* (1914); *Collected Papers of S. Ramanujan* (Cambridge 1927), S. 35f.
[6] E. REICHENBÄCHER, Hoffm. Z. *32*, 275 (1902) (nach VAHLEN, S. 211).
[7] J. CORDILHA, vgl. [2], S. 249.
[8] *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III AB 9 (B. G. Teubner, Leipzig 1914–1931) S. 1117.

Einblick in den Aufbau und die Funktionsweise moderner Rechenautomaten[1])

Unter Rechenautomaten (RA) verstehen wir Rechengeräte, welche nicht nur einzelne Operationen, wie Addition zweier Zahlen und ähnliches, sondern längere Operationsketten selbsttätig abwickeln, nachdem die gegebenen Zahlen und das Rechenprogramm in das Gerät eingeführt worden sind und der Startknopf betätigt wird. Die Resultate werden entweder in Form von Zahltabellen oder von graphischen Darstellungen geliefert.

[1]) Der Artikel ist eine auf Wunsch der Redaktion entstandene Bearbeitung eines in die Materie einführenden Vortrages des Verfassers in der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft Winterthur.

Jeder RA besitzt deshalb Eingabevorrichtungen für die gegebenen Zahlen und für das Programm, einen Rechenteil, Ausgabevorrichtungen für die Resultate sowie Elemente, welche den Antrieb und die Steuerung besorgen.

Wenn wir im folgenden in grossen Zügen die Funktionsweise eines RA beschreiben wollen, so müssen wir zwei Typen getrennt behandeln: Digitalautomaten (DA) und Analogautomaten (AA). Übrigens besteht trotz der kurzen Zeit, die seit der Konstruktion der ersten solchen Automaten verflossen ist, schon eine derart grosse Mannigfaltigkeit von Ausführungen, dass wir uns hier auf das Wesentliche beschränken müssen.

Digitalautomaten

In diesen werden die zu verarbeitenden Zahlen mit Hilfe von Ziffern und der Stellenwertschreibweise dargestellt wie etwa in einer Bürorechenmaschine. Da natürlich pro Zahl nur eine beschränkte Anzahl Ziffern mitgeführt werden kann, sind die verarbeitbaren Zahlen diskret verteilt. Wegen der im Laufe der Rechnung vorkommenden Rundungsfehler müssen immerhin bei Grossanlagen bis zu 20 Ziffern pro Zahl mitgenommen werden.

Das Rechenwerk (RW) eines DA ist imstande, die ersten vier Grundoperationen automatisch auszuführen. Offensichtlich benötigt der DA zusätzlich zu den oben aufgezählten Bauelementen noch eine Vorrichtung, welche erlaubt, Zwischenresultate, gegebene Zahlwerte, die erst später benötigt werden, sowie auch das vorbereitete Rechenprogramm aufzubewahren, einen sogenannten Speicher (oft auch «Gedächtnis» des DA genannt). Soll etwa die Zahl $z = a\,b + c\,d$ berechnet werden, so wandern a, b, c, d vorerst in den Speicher. Dann werden a und b ins RW geholt und miteinander multipliziert; das Produkt wird gespeichert. Es folgt die Multiplikation von c mit d. Dieses Produkt bleibt im RW, und im nächsten Schritt wird aus dem Speicher $a\,b$ entnommen und zu $c\,d$ addiert. Die jetzt im RW stehende Zahl z wird gespeichert und auf Wunsch herausgegeben. In dieser Weise werden längere Operationsketten schrittweise ausgeführt. Die einzelnen Schritte (Rechnen, Verschieben der Zahlen im Innern des DA) benötigen natürlich gewisse Zeiten. Allerdings können diese sehr kurz sein: Ein elektronischer DA (andere werden kaum mehr gebaut) bewältigt zum Beispiel einige tausend Additionen zehnstelliger Zahlen pro Sekunde und mehr.

Nach dieser kurzen Übersicht mögen noch einige Einzelheiten zur Sprache kommen: Die Eingabe der Zahlen geschieht meistens mit Hilfe von Lochkarten oder Magnetbändern. Diese müssen natürlich vorgängig mit Hilfsapparaten «beschriftet» werden. (Eine direkte Eingabe in den DA – etwa mit Hilfe einer Tastatur – wäre möglich, ist aber völlig unrationell, da damit die Arbeitsgeschwindigkeit des DA nicht voll ausgenützt würde.) Die Eingabegeschwindigkeit liegt für Lochkarten ungefähr bei zweitausend Ziffern pro Sekunde; für Magnetbänder ist sie etwa zehnmal grösser.

Die Ausgabe von Zahlen erfolgt entweder direkt in Klarschrift oder vorerst auch auf Lochkarten bzw. Magnetbändern, die dann von Hilfsapparaten automatisch in Zahltabellen (in beliebiger Anordnung der Zahlen) umgesetzt werden. Das Tempo der Ausgabe ist bei Magnetbändern ungefähr das gleiche, bei Lochkarten etwas geringer als bei der Eingabe. Das Schreibtempo für Klarschrift beträgt über tausend Zeichen pro Sekunde, wobei ganze Zeilen auf einen Schlag geschrieben werden.

Über die Rechengeschwindigkeit wurde oben schon eine Angabe gemacht. Es stehen DA in Entwicklung, welche beispielsweise 800000 Multiplikationen zehnstelliger Zahlen pro Sekunde ausführen. Diese unvorstellbaren Geschwindigkeiten wurden nicht etwa nur aus Prestigegründen der Firmen gezüchtet, sondern werden von den Anwendungsgebieten verlangt, zum Beispiel bei der Auswertung von statistischem Material der Meteorologie mit dem Zweck, zeitgerecht Wetterprognosen zu «errechnen».

Die Speicherung der Zahlen erfolgt meistens in Apparaturen, welche grundsätzlich so arbeiten wie ein Tonbandgerät (örtlich variierende Magnetisierung einer Schicht auf einem Band, einer Trommel oder einer Scheibe) oder in sogenannten Magnetkernspeichern, die aus einer grossen Zahl (bis über eine Million) magnetisierbarer Ringlein von rund 3 mm Durchmesser bestehen, welche in einer Art Drahtnetz in den Kreuzungspunkten eingehängt sind. Auf die Wirkungsweise dieser Speicher und auf andere Speicherungsmöglichkeiten kann hier nicht eingegangen werden. Dagegen sei noch etwas Grundsätzliches und allen Speichern Gemeinsames erwähnt: Es können pro «Speicherstelle» (auf einer magnetisierbaren Schicht ein Flächenstück von einem Bruchteil eines Quadratmillimeters) nur je zwei «Werte» der betreffenden Information gespeichert werden, etwa + oder − bzw. 0 oder 1. (Aus technischen Gründen können nur die beiden Sättigungszustände benützt werden.) Deshalb arbeiten einige Typen von DA intern im Dualsystem; bei den andern wird im Zehnersystem gearbeitet, wobei jede Ziffer durch einen aus nur zwei Zeichen aufgebauten Code dargestellt wird (vgl. Morsealphabet). Diese Codifizierung wird natürlich auch schon bei der Eingabe der Zahlen in den DA benützt. Sie bietet zusätzlich noch einfache Möglichkeiten der Selbstkontrolle des DA bei Verschiebungen der Zahlen innerhalb des Gerätes, zum Beispiel aus dem Speicher ins RW. Weitaus die meisten Fehler – solche können gelegentlich als Folge von Defekten auftreten – werden festgestellt; der DA hält an und meldet, wo der Fehler steckt. Nur dann versagt die Kontrolle, wenn innerhalb eines Zeitintervalles von einigen Mikrosekunden zwei Fehler auftreten, die sich kompensieren; dieser Fall tritt aber nach Schätzungen von Fachleuten im Mittel nur einmal pro einige Dutzend Jahre Laufzeit des DA auf, und dieses verschwindend kleine Risiko wird übernommen. Infolge der Selbstkontrolle besitzen die DA eine sehr grosse Zuverlässigkeit, die – neben der hohen Arbeitsgeschwindigkeit – ein wesentlicher Grund für ihren Einsatz ist.

Bildlich ausgedrückt, enthalten die Speicher eine grosse Zahl von «Zellen» (bis zu einigen Millionen), in denen je ein Operand Platz findet. Die Zellen und auch alle andern Stellen im Gerät, an denen sich ein Operand aufhalten kann, sind numeriert. Diese Nummern, Adressen genannt, dienen der Kennzeichnung des betreffenden Operanden gegenüber der Maschine.

Die Programmierung, das heisst die Aufstellung des Rechenplanes, erfolgt im Prinzip so, wie wenn man sich ein Rechenschema für die Durchführung «von Hand» vorbereiten würde, nur müssen die einzelnen Schritte explizit formuliert werden. Wir wollen dies am Beispiel der Berechnung von $z = a\,b + c\,d$ demonstrieren. (Es muss allerdings vorausgeschickt werden, dass verschiedene Systeme bestehen; wir greifen eines heraus, welches das Wesentliche zeigt.) Den Ablauf des Prozesses im Gerät haben wir schon weiter oben übersichtlicherweise beschrieben. Das eigentliche Programm lautet so:

Speichere den Inhalt der Eingabevorrichtung (also *a*, *b*, *c*, *d*; etwa auf einer Lochkarte) in den Zellen 2001, 2002, 2003, 2004! (Diese Adressen sind frei wählbar!)
Nimm den Inhalt der Zelle 2001 (das heisst *a*) ins RW!
Multipliziere mit dem Inhalt der Zelle 2002 (das heisst *b*)!
Speichere das Resultat in der Zelle 4501! (Adresse unter den noch nicht verwendeten frei wählbar!)
Stelle das RW auf Null und nimm dann den Inhalt von Zelle 2003 (das heisst *c*) ins RW!
Multipliziere mit dem Inhalt der Zelle 2004 (das heisst *d*)!
Addiere den Inhalt der Zelle 4501 (das heisst *a b*)!
Speichere das Resultat in der Zelle 4501! (Bei der Ablesung des Inhaltes einer Speicherzelle bleibt der Inhalt erhalten. Wird etwas Neues in die betreffende Zelle gegeben, so wird der alte Inhalt einfach «überschrieben» und damit natürlich vernichtet!
Gib den Inhalt der Zelle 4501 heraus!

Natürlich kann das Programm nicht in dieser Form ins Steuerwerk des DA eingegeben werden; die einzelnen Befehle müssen zuerst in «Maschinensprache» übersetzt werden. (Es bestehen heute schon einige Möglichkeiten, diese Übersetzung durch den DA selbst vornehmen zu lassen!) In der Maschinensprache wird jeder Befehl durch eine Gruppe von Ziffern codifiziert, von denen die einen den eigentlichen Operationsbefehl angeben, während die andern die zugehörigen Adressen darstellen. Beispielsweise kann etwa 152004 bedeuten: *15* Multipliziere! *2004* mit dem Inhalt der Zelle 2004. Natürlich ist die Anzahl der Befehle, welche der DA unmittelbar ausführen kann, beschränkt. Sind Operationen auszuführen, welche nicht zum Repertoire des DA gehören, so müssen sie auf eine Folge von einfacheren zurückgeführt werden. Das Radizieren wird beispielsweise gewöhnlich durch eine iterative Mittelbildung ersetzt.

Da die Befehlscodes aus Ziffern zusammengesetzt sind, ist es möglich, sie bzw. das ganze Programm wie eigentliche Zahlen einzugeben und im Speicher festzuhalten. Man plaziert sie in aufeinanderfolgenden Zellen, beginnend mit der Zelle Nr. 1. Nachdem dann auch noch die gegebenen Zahlen in die Eingabevorrichtung eingeführt worden sind und man den Startknopf gedrückt hat, «liest» das Steuerwerk den Inhalt der Zelle 1, das heisst, es setzt deren «physikalischen Inhalt» in elektrische Impulse um, welche die Ausführung des ersten Befehls des Programms bewirken. Nach Abschluss der betreffenden Operation wird aus der folgenden Zelle 2 der zweite Befehl geholt usw.

Soll ein Iterationsprozess durchgeführt werden (und diese sind ein bevorzugtes Anwendungsgebiet der DA, aus Gründen, die sich sofort zeigen werden), so tritt die Frage auf, wie der DA veranlasst werden könne, den Prozess im richtigen Moment abzubrechen, nämlich dann, wenn genügende Genauigkeit erreicht ist. Hier tritt eine Fähigkeit des DA in Aktion, welche von ausschlaggebender Bedeutung ist. (Sie ist übrigens der Grund dafür, dass der nur sehr beschränkt zutreffende Name «Elektronenhirn» geprägt wurde.) Der DA kann gewisse «Ja-Nein-Entscheide» selbsttätig fällen und daraus die Konsequenzen ziehen. Er kann etwa prüfen, ob die gerade im RW stehende Zahl positiv sei oder nicht, und auf Grund dieser Prüfung aus zwei verschiedenen Programmfortsetzungen die passende auswählen. Natürlich kann er

das nur auf Grund der entsprechenden Programmierung, wozu der sogenannte «bedingte Sprungbefehl» dient. Dieser bewirkt, dass im einen Fall das Steuerwerk den nächsten Befehl ganz normal aus der nächsten Zelle holt, im andern Fall aber auf eine andere Zelle springt, deren Adresse im Sprungbefehl angegeben wird. Auf diese Weise lässt sich das Programm «verzweigen». Insbesondere kann auf einen schon einmal durchlaufenen Programmteil «zurückgesprungen» werden; es wird daraufhin eine «Programmschlaufe» so oft durchlaufen, bis die bei jedem Umgang stattfindende Prüfung und Entscheidung ein anderes Resultat liefert als bis anhin, worauf ein neuer Programmteil in Angriff genommen wird. Damit beherrscht man die Iterationsprozesse bzw. alle Aufgaben, bei welchen die gleiche Formel mehrmals mit verschiedenen Zahlen ausgewertet werden muss (Wertetabellen von Funktionen, numerische Integration von Differentialgleichungen und ähnliches).

Der Umstand, dass die Befehle mit Ziffern codifiziert sind, ermöglicht auch, bei Bedarf im Laufe der Rechnung Befehle mit Hilfe des RW zu modifizieren, zum Beispiel Adressen zu ändern. Davon wird unter anderem Gebrauch gemacht bei gewissen Möglichkeiten, den DA den grössten Teil des Rechenprogramms selbst herstellen zu lassen, was die Programmierer von langweiliger Routinearbeit entlastet und Fehler im Programm verhütet. Das letztere ist um so wichtiger, als das Aufspüren von Fehlern in einem Programm meistens eine sehr zeitraubende Arbeit ist.

Analogautomaten

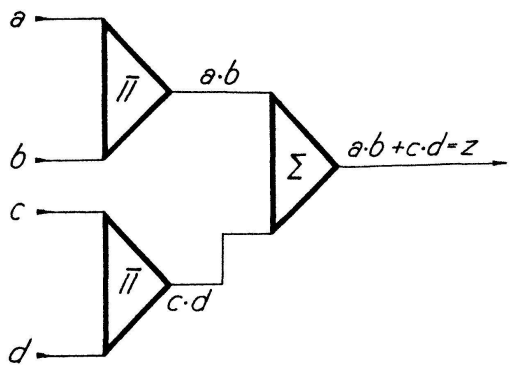
Hier werden die zu verarbeitenden Werte als Masszahlen von kontinuierlich veränderlichen physikalischen Grössen dargestellt (Verschiebungsstrecken, Drehwinkel, elektrische Spannungen und ähnliches; vgl. den Rechenschieber). Die verarbeitbaren Zahlen bilden also eine stetige (im allgemeinen aber beschränkte) Zahlenmenge.

Der Rechenteil des AA besteht aus einer Vielzahl von einzelnen «Rechengliedern», deren jedes gewöhnlich nur eine einzige Art von Rechenoperationen ausführt, zum Beispiel Differentialgetrieben zur Addition von Drehwinkeln, Spannungsteilern für Multiplikation usw. Beim AA besteht daher die Vorbereitungsarbeit nicht in der Fixierung der zeitlichen Aufeinanderfolge der Einzeloperationen, sondern hier ist festzulegen, in welcher Weise die einzelnen Rechenglieder zusammenzuschalten sind, damit gewisse in dieser Schaltung auftretende physikalische Grössen den gleichen Zusammenhang aufweisen wie die gegebenen und gesuchten Zahlen. (Es wird also gewissermassen ein Modell der Rechnung angefertigt.) Diese Schaltung wird vorerst in einem sogenannten Koppelungsplan festgehalten. Um etwa die Zahl $z = a\,b + c\,d$ zu berechnen, benötigt man zwei Multiplikationsglieder und ein Addierglied. Der Koppelungsplan ist (mit leicht verständlichen Symbolen für die Rechenglieder) in Figur 1 dargestellt.

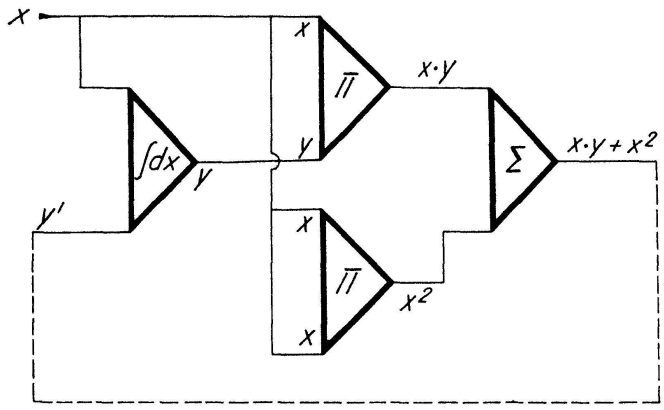
Man stellt sich am besten vor, alle Rechengrössen seien durch Drehwinkel realisiert. Wenn man nun, nachdem die Schaltung im Gerät selbst vorgenommen ist, die Zahlen a, b, c, d einstellt (zum Beispiel durch Drehen von Knöpfen), so arbeiten alle angeschalteten Rechenglieder simultan mit, und am Ausgang erscheint zeitverzugslos, aber mit einem gewissen Fehler infolge mechanischen Spiels und ähnlichem behaftet, das Resultat z, etwa auf einer Skala ablesbar. Da auf diese Weise Zwischen-

resultate, wie $a\,b$, unmittelbar als Eingangsgrösse in ein nächstes Rechenglied gehen, benötigt der AA keinen separaten Speicher.

Es ist einleuchtend, dass der AA besonders geeignet ist, Probleme zu behandeln, in welchen Funktionen von nur *einer* Variablen auftreten. Soll beispielsweise der Verlauf der Funktion $z(b) = a\,b + c\,d$ für $0 \leqq b \leqq 1$ ermittelt werden, so wird man anfänglich a, c, d und $b = 0$ einstellen und anschliessend b von Null auf Eins zunehmen lassen. Am Ausgang erscheint dann laufend der Wert $z(b)$, und man kann direkt die graphische Darstellung der Funktion aufzeichnen lassen, sei es auf dem Schirm eines Kathodenstrahloszillographen oder durch einen Schreibstift auf Papier. An dieser Stelle setzt dann auch die bisher nicht in Erscheinung getretene Automatisierung ein: Die Variation von b und die Aufzeichnung der Kurve werden selbsttätig ausgeführt.



Figur 1



Figur 2

Die besondere Eignung des AA für die Behandlung funktionsmässiger Aufgaben wird noch durch den Umstand unterstützt, dass es bekanntlich mechanische, elektrische und andere Apparate gibt, welche eine Integration ausführen. AA, welche Integratoren enthalten (Integrieranlagen), können sehr gut für die Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt werden, was an einem Beispiel demonstriert sei: $y' - x\,y - x^2 = 0$ mit der Anfangsbedingung $x = 0$; $y = y_0$. Die Lösung geschieht nicht etwa nach einer Näherungsmethode wie beim DA, sondern wiederum so, dass eine Schaltung der Rechenglieder gesucht wird, in welcher zwischen den x und y darstellenden Grössen die geforderte Beziehung besteht. Nur ist hier diese Schaltung nicht sofort zu erkennen. Man kann sie auf Grund der folgenden (heuristischen) Überlegung finden: Die Differentialgleichung wird nach y' aufgelöst: $y' = x\,y + x^2$. Nun nehmen wir an, y' sei bekannt, und berechnen daraus y sowie $x\,y + x^2$. Der Koppelungsplan dafür ist in Figur 2 dargestellt (gestrichelte Linie nicht beachten!).

Jetzt sorgen wir dafür, dass die Ausgangsgrösse des Integrators für $x = 0$ den Wert y_0 hat (Einstellung am Apparat), und koppeln dann noch gemäss der gestrichelten Linie. Dadurch wird die Bedingung $y' = x\,y + x^2$ erfüllt, und wenn jetzt x variiert wird, so erscheint am Ausgang des Integrators laufend der Funktionswert der gesuchten Lösung. Natürlich kann auch hier durch Steuerung eines Schreibstiftes sofort die Bildkurve gezeichnet werden. (Aus der gleichen Schaltung kann übrigens auch $y'(x)$ entnommen werden!)

Die hier verwendete Idee der «Rückkoppelung» des Ausganges eines Rechengliedes auf den Eingang eines «früheren» ist in der Analogierechentechnik sehr fruchtbar. (Die Idee als solche ist in der Technik längst bekannt.)

Es mag etwas überraschen, dass wir mit einem Integrator gearbeitet haben und nicht mit einem Differentiator. Der Grund liegt nur darin, dass mit dem ersteren höhere Genauigkeit erreicht wird als mit dem letzteren.

Der Leser mag den Eindruck gewonnen haben, das Programmieren für einen AA erfordere bedeutend weniger spezielle Kenntnisse als das für einen DA; dies ist weitgehend richtig. Immerhin muss noch auf folgendes hingewiesen werden: Bei beiden Typen sind im allgemeinen die verarbeitbaren Zahlen betragsmässig nach oben beschränkt. Beim DA liegt gewöhnlich diese Schranke so hoch, dass sie praktisch belanglos ist. Beim AA ist das meistens nicht der Fall, und es sind deshalb im Rahmen der Programmierung oft Variablentransformationen nötig, damit der zulässige Bereich einerseits nicht überschritten und anderseits (aus Genauigkeitsgründen und wegen gewisser konstruktiv bedingter Umstände) möglichst ausgeschöpft wird. Es würde jedoch zu weit führen, wenn wir hier auf dieses Problem eingehen wollten.

W. PROKOP, Winterthur

Ungelöste Probleme

Nr. 33. For irrational α let $M(\alpha)$ be the upper limit of those numbers μ such that the inequality

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\mu q^2}$$

has infinitely many solutions in rational integers p and q. Give a short proof, depending on ideas rather than calculations, of the fact that if $M(\alpha) < 3$ then α is a quadratic irrationality.

This is of course a consequence of MARKOV's classical work on the minima of indefinite binary quadratic forms, in which the α with $M(\alpha) < 3$ are completely determined. There it was shown, after many other properties of the continued fraction expansion of such an α had been exhibited, that the expansion is periodic, and hence that α is quadratic. A direct conceptual proof of this would be most interesting in itself, and would permit great simplification in MARKOV's theory. For literature and a modern proof of the full Markov theorem, see J. W. S. CASSELS, *Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. 45 (1957). W. J. LEVEQUE

Nachtrag zu Nr. 26. Die dort ausgesprochene Vermutung, wonach sich ein zusammenhängender Streckenkomplex der chromatischen Zahl k stets auf ein Simplex mit k Punkten zusammenziehen lässt, impliziert im Falle $k = 5$, wie bereits angedeutet worden ist, die Gültigkeit des Vierfarbensatzes. Herr K. WAGNER (Köln)[1]) machte uns in freundlicher Weise darauf aufmerksam, dass auch umgekehrt aus der Richtigkeit der Vierfarbenhypothese auf die Richtigkeit unserer Vermutung geschlossen werden kann, so dass Vierfarbensatz und Zusammenziehbarkeit im Falle

[1]) Brief vom 9. Februar 1959.