Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Autor(en): **Sydler, J.-P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20714

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1960

Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod. 0) lorsque leur différence est équivalente à un cube. Nous allons donner des exemples de couples de tétraèdres jouissant de cette propriété.

1. Soit $(\alpha, \beta; \gamma)$ un tétraèdre $ABCD$ tel que: $AB \perp BCD$, $DC \perp CBA$, dièdre $AB = \alpha$, dièdre $CD = \beta$, dièdre $AD = \gamma$; $\overline{AB} = \operatorname{cotg} \alpha$, $\overline{CD} = \operatorname{cotg} \beta$. On a $\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ et $\overline{AD} = \operatorname{tg} \gamma$.

Considérons les deux tétraèdres $(\delta, \alpha; \pi/3) = ABCD$ et $(\delta, 2\alpha; \alpha) = A'B'C'D'$. Comme $\sin \alpha \cdot \sin \delta = 1/2$, nous supposerons $\pi/4 > \alpha > \pi/6$.

Les tétraèdres $(\alpha, \delta; \pi/3)$ *et* $(2\alpha, \delta; \alpha)$ *sont équivalents entre eux (mod. 0).*

Montrons d'abord que les conditions nécessaires de DEHN pour l'équivalence sont vérifiées. On a pour les dièdres les relations:

$$\sphericalangle CD = \alpha\,; \quad \sphericalangle C'D' = 2\alpha\,; \quad \sphericalangle A'D' = \alpha\,; \quad \sphericalangle AB = \delta\,, \quad \sphericalangle A'B' = \delta\,,$$

les autres dièdres étant rationnels en π. Il faut donc que les longueurs vérifient les relations:

$$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'}\,; \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}\,,$$

relations qui sont effectivement remplies puisque

$$2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'} = 2 \operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha = \overline{CD}\,;$$

$$\overline{AB} = \operatorname{cotg} \delta = \overline{A'B'}\,.$$

Montrons maintenant que l'équivalence (mod. 0) a bien lieu. Enlevons du tétraèdre $ABCD$ le tétraèdre $A'B'C'D'$ de façon que $A' = A$, $B' = B$, $C' = E$ sur BC, $D' = F$ sur BD [fig. 1].

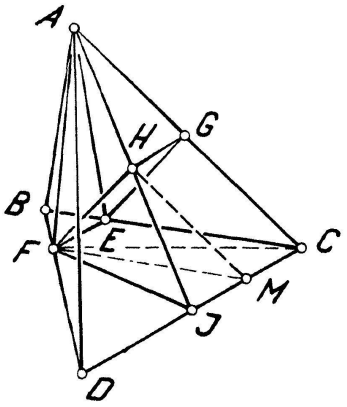

Figure 1

Menons par E et par F les perpendiculaires au plan ACD et soient G et H leurs pieds. Traçons encore la droite AH qui coupe CD en J et soit enfin M le milieu de JC.

Comme $\sphericalangle AEC = \pi - 2\alpha$ et $\sphericalangle ACB = \alpha$, la droite EG est la bissectrice de AEC et la médiatrice de AC. Le triangle AEC est isocèle, le plan $GEFH$ est le plan médiateur de AC, et l'on a $\overline{AF} = \overline{FC} = \operatorname{tg} \alpha$. Comme G est au milieu de AC, $\overline{GH} = \overline{CM} = \overline{MJ}$ et d'autre part, $\overline{GH} = \overline{FE} = \operatorname{cotg} 2\alpha$. On a donc:

$$\overline{FC} = \overline{FJ} = \operatorname{tg} \alpha\,; \quad \overline{JD} = \overline{CD} - \overline{CJ} = \operatorname{cotg} \alpha - 2 \operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Par conséquent: $\overline{AF} = \overline{FJ} = \overline{JD}$; dièdre $AD = \pi/3$, dièdre $AJ = \pi/2$, dièdre $FD = \pi/2$. Le tétraèdre $AFJD$ est donc un tétraèdre de HILL de première espèce équivalent à un cube. Le polyèdre $AEFCJ$ est équivalent à un cube, comme on le voit en faisant tourner le tétraèdre $FHMJ$ de 180° autour de FH. Par conséquent: $AEFCD \sim AFJD + AFECD \sim$ cube

$$\boxed{\left(\alpha, \delta; \frac{\pi}{3}\right) \sim (2\alpha, \delta; \alpha)} \quad (\text{mod. } 0), \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right] \tag{1}$$

2. Considérons encore les deux tétraèdres $(2\alpha, \xi; \pi/2 - \alpha) = ABEF$ et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) = ABCD \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{6}, \sin \xi = \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \qquad [\text{fig. } 2)$$

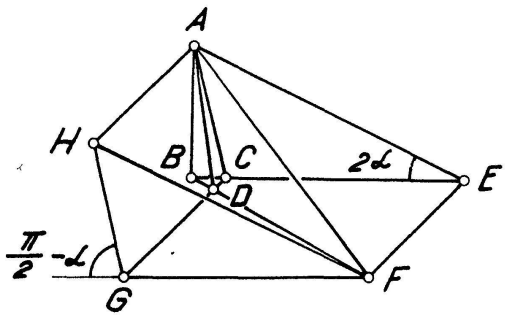

Figure 2

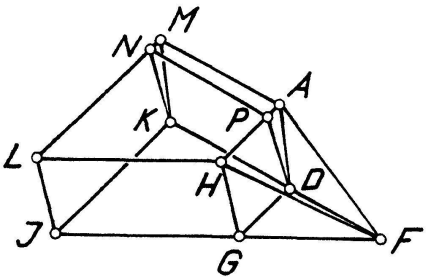

Figure 3

Si $AHCGEF$ est le prisme de base ACE et d'arête EF, on a

$$\left(2\alpha, \xi; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) \sim ACDEF \sim AHCGEF - AHDGF \sim$$
$$- AHDGF \quad (\text{mod. } 0).$$

Prenons sur FG un point J et sur FD un point K tels que $\overline{JH} = \overline{HF}$ et $\overline{KA} = \overline{AF}$. Ajoutons au polyèdre le prisme $DGJKPHLN$ de base $DGJK$ et d'arête GH et le prisme $DAPKMN$ de base DAP et d'arête DK [fig. 3]

$$FAHMLKJ \sim AHDGF \quad (\text{mod. } 0).$$

Enlevons de ce nouveau polyèdre le polyèdre $FAHKJ$ équivalent à un cube et le prisme $MAKSHR$ [fig. 4]: $AHDGF \sim HSLJR$ (mod. 0).

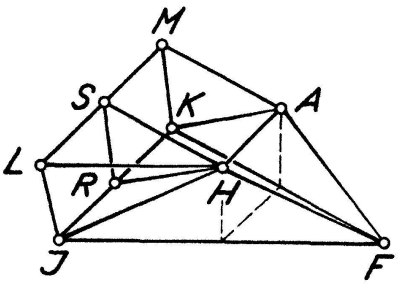

Figure 4

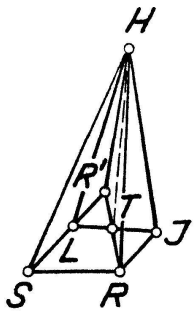

Figure 5

Les dièdres de ce dernier polyèdre ont les valeurs suivantes:

$$\sphericalangle LH = \sphericalangle HJ = \sphericalangle LJ = \sphericalangle SH = \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle LS = \frac{\pi}{2} - \alpha\,; \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3}\,; \quad \sphericalangle RH = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\sphericalangle JR = \pi - \sphericalangle JLH - \sphericalangle LHJ = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\,\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha\,.$$

Comme ce polyèdre, équivalent à $-\,ACDEF$, vérifie aussi les conditions nécessaires de DEHN pour l'équivalence à un cube, on a la relation

$$\overline{RH} = \overline{LS} + \overline{JR}$$

Le triangle HLJ est isocèle, $\overline{HL} = \overline{HJ}$; désignons par T le milieu de LJ. Faisons enfin tourner le tétraèdre $HTJR$ d'un angle π autour de HT [fig. 5]. Le polyèdre $HSLJR$ se transforme dans le tétraèdre $HR'SR$ pour lequel

$$\overline{SR'} = \overline{SL} + \overline{LR'} = \overline{SL} + \overline{JR} = \overline{RH} = \overline{R'H}\,, \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3}\,, \quad \sphericalangle SH = \sphericalangle R'R = \frac{\pi}{2}\,.$$

$HR'SR$ est donc un tétraèdre de HILL de première espèce, équivalent à un cube. Par conséquent:

$$ACDEF \sim -\,AHDGF \sim -\,HSLJR \sim -\,HR'SR \sim 0 \quad (\text{mod. } 0)\,.$$

Donc

$$\boxed{\left(2\,\alpha, \xi; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right)} \quad (\text{mod. } 0)\,, \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right] \tag{2}$$

3. Nous avons établi dans un précédent travail que

$$(\overline{\alpha}, \overline{\gamma}; \overline{\eta_1}) - (\overline{\beta}, \overline{\gamma}; \overline{\eta_2}) \sim \left(\overline{\alpha}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta_2}; \overline{\zeta}\right) - \left(\overline{\beta}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta_1}; \overline{\zeta}\right).$$

Par conséquent, des deux relations (1) et (2) découlent les deux relations

$$\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega\right) \sim \left(2\,\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \quad (\text{mod. } 0) \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right]$$

et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \alpha; \omega\right) \sim \left(2\,\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \quad (\text{mod. } 0) \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right].$$

La relation étant aussi vérifiée pour $\pi/6$, on a donc

$$\boxed{\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega\right) \sim \left(2\,\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right)} \quad (\text{mod. } 0)\,, \quad \left[0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right].$$

Nous avons ainsi obtenu trois séries infinies de couples de tétraèdres dont la différence est équivalente à un cube, sans qu'ils soient eux-mêmes en général équivalents à un cube.

J.-P. SYDLER, Zürich