# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

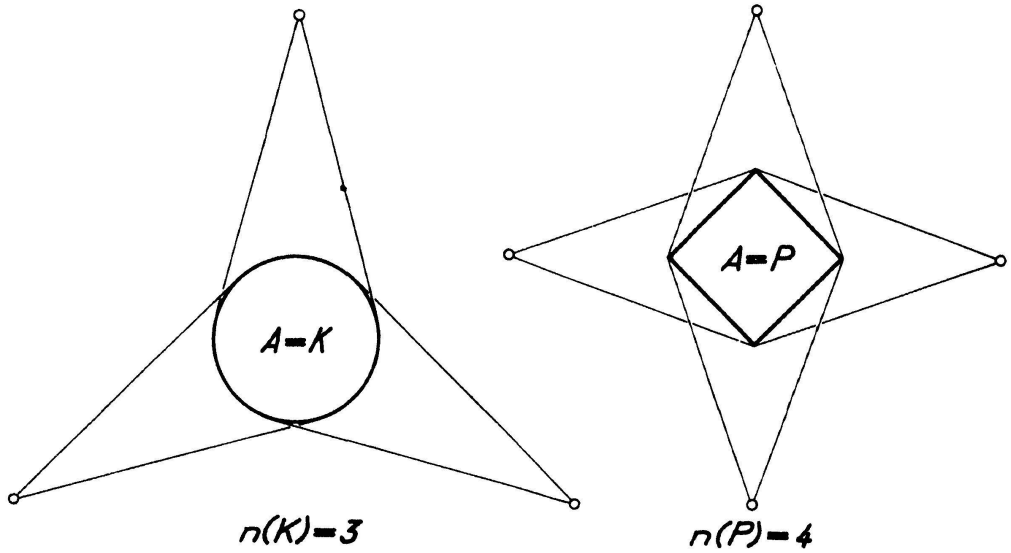
**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

einem Punkt $p_i$ aus vollsichtbar. Vergleiche hierzu die sich auf den ebenen Fall $k = 2$ beziehenden Figuren.




Eine nun naheliegende Frage ist die nach dem maximalen und minimalen Wert, den die Zahlen $n(A)$ für die verschieden gestalteten konvexen Körper $A$ annehmen. Die in diesem Sinn extremalen Körper sind diejenigen, deren Randflächen am schlechtesten und am besten von aussen überblickbar sind. Bezeichnet $K$ eine Kugel und $P$ ein Parallelotop, so gilt einerseits

$$n(K) = k + 1 \tag{a}$$

und andererseits

$$n(P) = 2^k . \tag{b}$$

Beide Resultate lassen sich mit einfachen elementaren Überlegungen gewinnen. Vermutlich ist nun $K$ ein am besten und $P$ ein am schlechtesten von aussen überblickbarer Körper, das heisst, dass die Ungleichung

$$k + 1 \leqslant n(A) \leqslant 2^k \tag{c}$$

gilt, wo links Gleichheit für die Kugel und rechts für Parallelotope besteht. Das hier vorliegende ungelöste Problem lautet also: *Ist es zutreffend, dass für die kleinste Zahl $n(A)$ der im Äussern eines beliebigen $k$-dimensionalen eigentlich konvexen Körpers $A$ zur vollen Überblickung der Randfläche von $A$ wählbaren Blickpunkte die Ungleichung (c) besteht, oder gibt es Körper, die in diesem Sinne noch günstiger bzw. noch ungünstiger sind, als Kugel bzw. Parallelotop?*

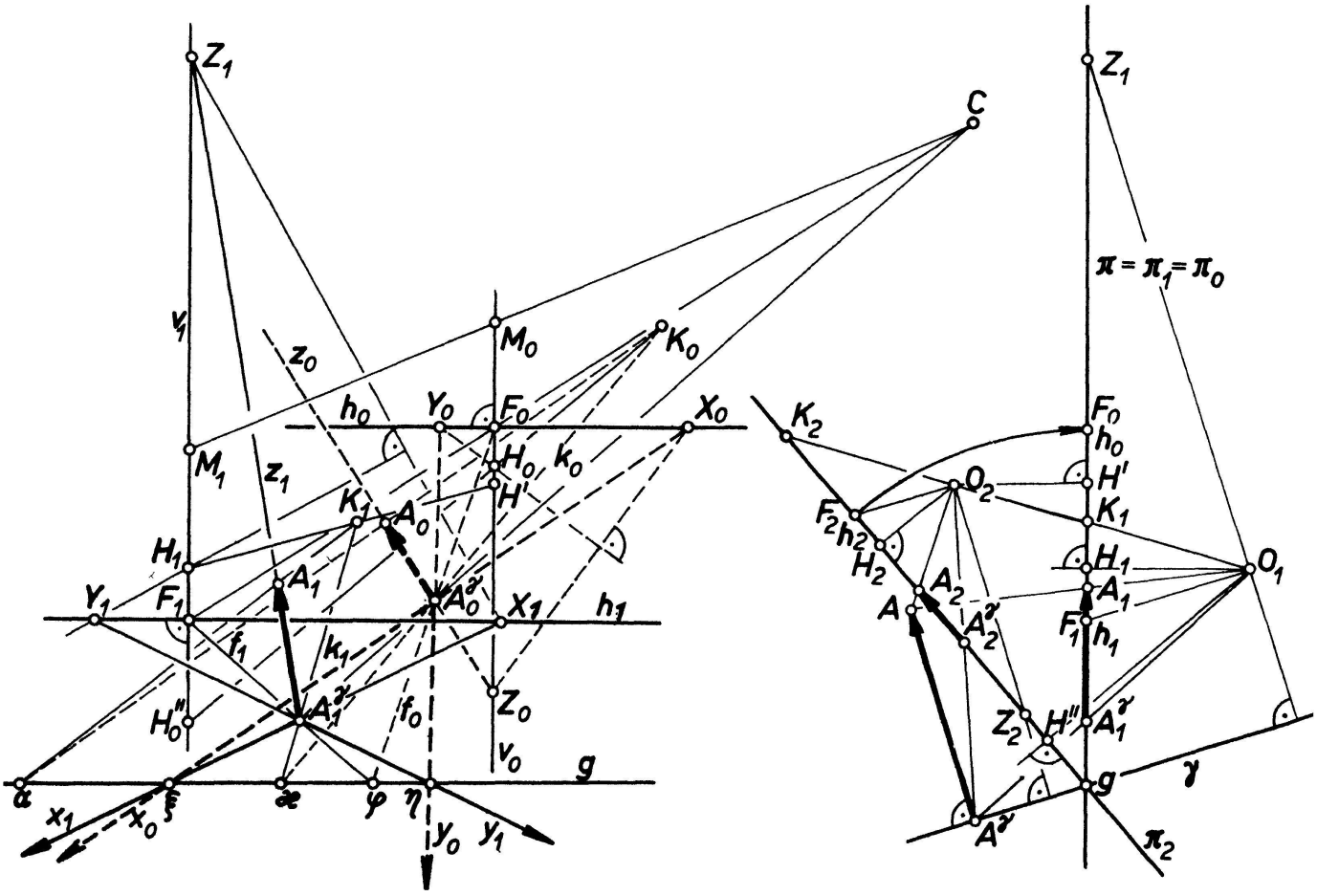
H. HADWIGER

# Kleine Mitteilungen

## Umzeichnen von Perspektiven bei ungleichgeneigten Bildebenen

Es seien die Grundebene $\gamma$ und zwei Bildebenen $\pi_1$, $\pi_2$ gegeben, die sich in der Grundlinie $g$ der Grundebene $\gamma$ schneiden. Weiter seien die zu $\pi_1$, $\pi_2$ gehörigen Augen $O_1$, $O_2$ (keines von ihnen sei Fernpunkt von Normalen zu $\gamma$) gegeben. (Figur, rechts, Ansicht in Richtung $g$). Sei $A$ ein beliebiger Raumpunkt, $A^\gamma$ sein normales Bild in $\gamma$, $A_1$, $A_1^\gamma$ seien die ersten, $A_2$, $A_2^\gamma$ die zweiten Perspektiven von $A$, $A^\gamma$. Seien weiter $H_1$, $H_2$ die normalen Bilder von $O_1$, $O_2$ in $\pi_1$, $\pi_2$ (die sogenannten Hauptpunkte der Perspektiven). Wir drehen nun

die Bildebene $\pi_2$ um $g$ nach $\pi_1$ um. Die Figuren der gedrehten zweiten Perspektive bezeichnen wir kurz mit dem Index $o$. Wir drehen noch die Grundebene $\gamma$ um $g$ nach $\pi_1$ um, und die gedrehten Figuren der Grundebene $\gamma$ bezeichnen wir mit ( ). Es sei $\Phi$ eine ebene Figur in $\gamma$. Was für ein Zusammenhang besteht zwischen den Figuren $(\Phi)$, $\Phi_1$, $\Phi_0$?




Die erste und die gedrehte zweite Perspektive seien in $\pi = \pi_1 = \pi_0$ durch die Hauptpunkte $H_1$, $H_0$, die Horizonte $h_1$, $h_0$ und die Fluchtpunkte $Z_1$, $Z_0$ der Normalen zu $\gamma$ gegeben. $H_1$, $Z_1$ und $H_0$, $Z_0$ liegen auf den Hauptvertikalen $v_1$, $v_0$, $h_1 \perp v_1$, $h_0 \perp v_0$. Die Schnittpunkte $F_1 = h_1 \times v_1$, $F_0 = h_0 \times v_0$ sind Fluchtpunkte der Fallgeraden von $\gamma$. Leicht konstruieren wir die Messpunkte $M_1$, $M_0$ beider Perspektiven. Sie liegen auf den Hauptvertikalen $v_1$, $v_0$ und es gilt $F_1M_1 = F_1O_1$, $F_0M_0 = F_2O_2$. Wie bekannt, sind die Figuren $(\Phi)$, $\Phi_1$ bzw. $(\Phi)$, $\Phi_2$ kollinear (Zentrum $M_1$ bzw. $M_0$, Achse $g$, Fluchtlinie der Kollineation $h_1$ bzw. $h_0$). Darum gilt: Die Figuren $\Phi_1$, $\Phi_0$ sind kollinear für die Achse $g$, das Paar $h_1$, $h_0$ und das Zentrum $C$, das der Schnittpunkt $F_1F_0$ und $M_1M_0$ ist.

Die Schnittpunkte von $O_1O_2$ mit $\pi_1$, $\pi_2$ seien die Kernpunkte $K_1$, $K_2$. Jede Ebene durch $O_1O_2$ schneidet $\pi_1$ und $\pi_2$ in Kernstrahlen, die sich auf der Grundlinie $g$ treffen und durch $K_1$ und $K_0$ gehen. Bezeichnen wir mit $H'$, $H''$ die normalen Bilder von $O_2$, $O_1$ in $\pi_1$, $\pi_2$. $H'$ liegt auf $v_0$, $H''$ auf $v_1$, $H_1H'$ geht durch $K_1$, $H_2H''$ durch $K_2$. Seien $d_1 = O_1H_1$, $d_2 = O_2H_2$ die Distanzen von den Bildebenen $\pi_1$, $\pi_2$ (Distanzen der Perspektiven), ferner seien $d' = O_2H'$, $d'' = O_1H''$. Dann gilt

$$\frac{d_1}{d'} = \frac{K_1H_1}{K_1H'}, \quad \frac{d_2}{d''} = \frac{K_2H_2}{K_2H''}.$$

Daraus kann man die Kernpunkte $K_1$, $K_0$ in $\pi$ auf $H_1H'$, $H_0H_0''$ konstruieren. Die Linien $K_1Z_1$, $K_0Z_0$ und auch $K_1F_1$, $K_0F_0$ sind Kernstrahlen.

Jetzt kann man schon das Umzeichnen beider Perspektiven beschreiben. Die erste Perspektive von $A$, $A^\gamma$ sei durch $A_1$, $A_1^\gamma$ gegeben, wobei $A_1A_1^\gamma$ durch $Z_1$ geht. Um $A_0^\gamma$ zu ermitteln, lege man in $\gamma$ durch $A^\gamma$ die Fallgerade $f$. Die Perspektive $f_1 = F_1A_1^\gamma$ schneidet $g$ in $\varphi$,

$f_0$ geht durch $\varphi$ und $F_0$. Die Perspektive $A_0^\gamma$ ist dann auf Grund der Kollineation zwischen $\Phi_1$, $\Phi_0$ der Schnittpunkt von $f_0$ und $CA_1^\gamma$. Auch wenn man durch $A^\gamma$ die Ebene $O_1O_2A^\gamma$ legt und ihre Kernstrahlen $k_1$, $k_2$, die sich auf $g$ in $\varkappa$ schneiden, verwendet, so ist in $\pi$: $k_1 = K_1A_1^\gamma$ und $A_0^\gamma$ liegt auf $k_0 = K_0\varkappa$. Wenn wir ähnlich die Ebene $O_1O_2A$ verwenden, so schneidet ihre Kerngerade in $\pi_1$, $A_1K_1$, $g$ in $\alpha$ und $A_0$ ist der Schnittpunkt von $\alpha K_0$ und $A_0^\gamma Z_0$.

Wählen wir noch die erste Perspektive eines Achsenkreuzes mit zueinander normalen Achsen. Die Achse $z$ sei lotrecht, ihr Fluchtpunkt ist $Z_1$. Die Achsen $x$ und $y$ wählen wir in $\gamma$. Seien $X_1$, $Y_1$ ihre Fluchtpunkte auf $h_1$ ($H_1$ ist dann das Orthozentrum vom $\Delta\, X_1Y_1Z_1$). Zur Vereinfachung der Figur wählen wir den Ursprung des Achsenkreuzes in $A^\gamma$, $x_1 = X_1A_1^\gamma$, $y_1 = Y_1A_1^\gamma$, $z_1 = Z_1A_1^\gamma$. $x_1$ und $y_1$ schneiden $g$ in $\xi$ und $\eta$. Dann ist $x_0 = \xi A_0^\gamma$, $y_0 = \eta A_0^\gamma$, $z_0 = Z_0A_0^\gamma$. Die Schnittpunkte $X_0$, $Y_0$ von $x_0$ und $y_0$ mit $h_0$ sind die Fluchtpunkte von $x$, $y$ und $H_0$ ist das Orthozentrum von $\Delta\, X_0Y_0Z_0$.

*Zwei Sonderfälle:*

1. $\pi_2$ sei zu $\gamma$ normal. Unsere Konstruktion gestattet das Umzeichnen zweier Perspektiven mit lotrechter und geneigter Bildebene.
2. $\pi_1 = \pi_2$ liefert das Umzeichnen nach HOHENBERG (F. HOHENBERG, El. Math. *10*, 57–61 (1955)).

LADISLAV DRS (Prag)

## Über die Lagerung von Punkten auf der Kugel

Auf einer Einheitskugel sollen sukzessive die Punkte $P_1, P_2, \ldots$ gelagert werden. $a_N$ bezeichne den kleinsten aller sphärischen Abstände von je zwei verschiedenen der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_N$. Man kann zeigen (siehe etwa TÓTH [1][1]), dass für grosse $N$ der Abstand $a_N$ im wesentlichen nicht grösser als

$$\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}\,\frac{1}{\sqrt{N}}$$

sein kann. Genauer ausgedrückt: Es ist

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, a_N\sqrt{N} \leqslant \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} = 3{,}80\ldots. \tag{1}$$

Die rechts stehende Konstante kann durch keine kleinere ersetzt werden. Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass dennoch für unendlich viele $N$ der Minimalabstand $a_N$ merklich kleiner als

$$\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}$$

sein muss. Es gilt für jede Punktfolge $P_1, P_2, \ldots$

$$\underline{\lim_{N\to\infty}}\, a_N N \leqslant \frac{2}{\sqrt{\log 4 - 1}} = 3{,}22\ldots. \tag{2}$$

Mit etwas mehr Aufwand liesse sich die Schranke $2/\sqrt{\log 4 - 1}$ noch verbessern, jedoch dürfte es nicht einfach sein, die bestmögliche in (2) zulässige Konstante zu finden. Ein analoges Resultat für den Kreis anstatt der Kugel wurde erstmals von DE BRUIJN und ERDÖS [2] bewiesen (vgl. auch [3], [4], [6]). Der folgende Beweis von (2) liesse sich, ähnlich wie dies in [6] für $n$-dimensionale ebene Bereiche durchgeführt wurde, auf $n$-dimensionale Kugeln und noch allgemeinere Flächen verallgemeinern.

*Beweis:* Es sei angenommen, dass eine Zahl $k > 2/\sqrt{\log 4 - 1}$ existiert, so dass von einem gewissen $N$ an stets

$$a_n\sqrt{n} \geqslant k \qquad (n \geqslant N) \tag{3}$$

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 134.

gilt. $a(P_i, P_k)$ bezeichne den sphärischen Abstand zwischen $P_i$ und $P_k$. Um jeden Punkt $P_i$ mit $i = 1, 2, \ldots 4N - 1$ werde nun eine Kugelkappe konstruiert, die aus allen Punkten $X$ der Kugeloberfläche besteht, für die gilt

$$a(P_i, X) \leqslant \frac{k}{2} \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \text{falls } 0 \leqslant i < N \text{ ist} \tag{4}$$

und

$$a(P_i, X) \leqslant \frac{k}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right), \quad \text{falls } N \leqslant i < 4N \text{ ist.} \tag{5}$$

Man überzeugt sich sofort, dass wegen (3) je zwei dieser Kugelkappen keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Die Oberfläche einer Kalotte mit dem Öffnungswinkel $a$ ist

$$2\pi(1 - \cos a) = \pi a^2 + 0(a^4).$$

Für die Summe der Oberflächen aller Kappen (4), (5) hat man daher

$$N \frac{\pi k^2}{4N} + \sum_{i=N}^{4N-1} \frac{\pi k^2}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 \leqslant 4\pi + 0\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ersetzt man die Summe durch das entsprechende Integral (Anwendung der Eulerschen Summenformel), so ergibt sich für $N \to \infty$

$$\lim_{N \to \infty} \left( \frac{\pi k^2}{4} + \frac{\pi k^2}{4} \int_N^{4N-1} \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 dx \right) \leqslant 4\pi,$$

woraus man durch Integration und Durchführung des Grenzüberganges

$$\pi k^2 (\log 4 - 1) \leqslant 4\pi,$$

also

$$k \leqslant \frac{2}{\sqrt{\log 4 - 1}}$$

erhält. Dies aber widerspricht der Definition von $k$. (3) ist demnach nicht richtig, und es muss (2) gelten.

H. Groemer (Corvallis, Oregon, USA)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.* Grundl. math. Wiss. LXV (Springer 1953). S. 113ff.

[2] N. G. de Bruijn und P. Erdös, *Sequences of Points on a Circle,* Kon. Nederl. Akad. v. Wet. Proc. *52,* 1, 46–49 (1949).

[3] A. Ostrowski, *Eine Verschärfung des Schubfächerprinzips in einem linearen Intervall,* Arch. Math. *8,* 1–10 (1957).

[4] G. H. Toulmin, *Subdivision of an Intervall by a Sequence of Points,* Arch. Math. *8,* 158–161 (1957.

[5] A. Schönhage, *Zum Schubfächerprinzip im linearen Intervall,* Arch. Math. *8,* 327–329 (1957).

[6] H. Groemer, *Über den Minimalabstand der ersten N Glieder einer unendlichen Punktfolge,* Math. Phys. *64* (im Druck).

## Bemerkung zu einer Arbeit von L. Fejes Tóth

Steinhaus[1]) hat die Frage untersucht, wie man einen nicht notwendigerweise homogenen Körper in $n$ Teile zerlegen soll, damit die Summe der Trägheitsmomente der Teile bezüglich ihrer Massenmittelpunkte minimal wird. Fejes Tóth[2]) hat das asymptotische Verhalten

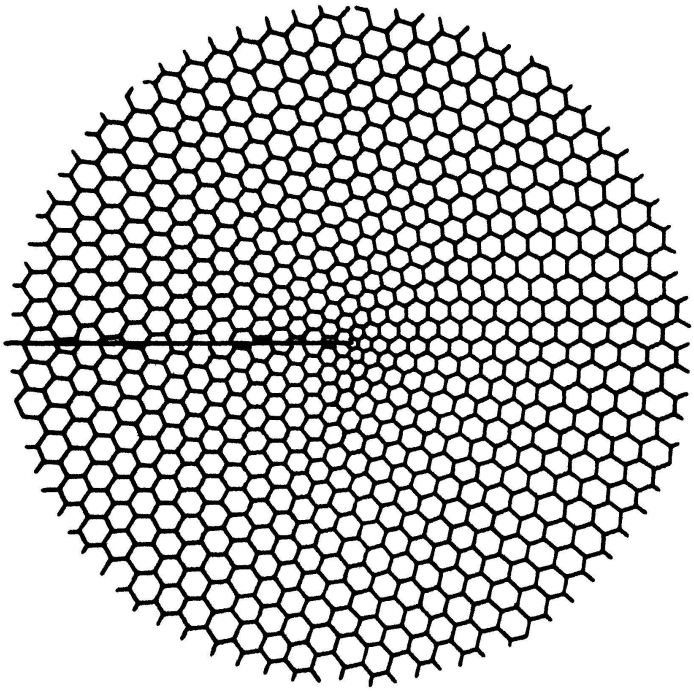
[1]) H. Steinhaus, *Sur la division des corps matériels en parties,* Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, *4,* 801–804 (1956).

[2]) L. Fejes Tóth, *Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d'éléments,* Acta Math. Acad. Sci. Hung. *10,* 299–304 (1959), und *Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie,* El. Math. *15,* 25–36 (1960).

der extremalen Zerlegung im ebenen Fall betrachtet, wenn $n \to \infty$. Er fand, dass die extremale Einteilung in überwiegender Mehrheit aus «angenähert regelmässigen» Sechsecken mit demselben Trägheitsmoment besteht, und bemerkt, dass eine derartige Einteilung in lauter solche Sechsecke im allgemeinen wahrscheinlich unmöglich ist. Zum Beispiel ist es nicht gelungen, eine derartige Einteilung zu finden, wenn das Gebiet $G$ eine Kreis scheibe ist und die Belegungsfunktion radial abnimmt.

In der vorliegenden Note weisen wir darauf hin, dass sich diese Frage mittels der Ele mente der komplexen Funktionentheorie leicht lösen lässt. Wir geben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine derartige Einteilung in lauter «angenähert regelmässige» Sechsecke existiert. Darunter verstehen wir folgendes:

Es existiert eine Folge von Zerlegungen von $G$ in Sechsecke derart, dass die Gestalt der Sechsecke im Inneren von $G$ mit der Verfeinerung der Einteilung gegen die des regelmässigen Sechsecks konvergiert und die Trägheitsmomente der einzelnen Sechsecke innerhalb jeder Einteilung miteinander übereinstimmen.



**Satz.** *Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $p(x, y)$ eine in $G$ positive Belegungsfunktion. Dann ist für die Existenz einer Einteilung in «angenähert regelmässige» Sechsecke mit demselben Trägheitsmoment das Erfülltsein der Relation*

$$\Delta \log p(x, y) = 0 \tag{1}$$

*notwendig und hinreichend, wobei $\Delta f(x, y)$ den Laplaceschen Operator von $f(x, y)$ bedeutet.*

*Beweis. a) Hinlänglichkeit:* Ist (1) erfüllt, so existiert eine in $G$ analytische Funktion $f(z)$ mit $|f'(z)| = [p(x, y)]^{-\frac{1}{4}}$, $(z = x + i\,y)$[3]; setzt man nämlich

$$u(x, y) = -\frac{1}{4} \log p(x, y)\,,$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{8}\left(\int_0^y u_x(x, t)\,dt - \int_0^x u_y(t, y)\,dt\right),$$

so erfüllt die Funktion

$$\log f'(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

[3]) Das Trägheitsmoment eines homogenen Kreises bezüglich seines Mittelpunktes ist mit der vierten Potenz des Radius proportional.

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und $u(x, y)$ und $v(x, y)$ die Laplacesche Gleichung. Da $p(x, y)$ in $G$ positiv ist, ist daher $\log f'(z)$ und damit auch $f'(z)$ eine in $G$ reguläre Funktion. Es ist

$$\operatorname{Re} \log f'(z) = \log | f'(z) | = -\frac{1}{4} \log p(x, y) ,$$

und $f(z)$ vermittelt eine konforme Abbildung von $G$ auf ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet; hieraus folgt schon die Hinlänglichkeit der Bedingung (1).

*b) Notwendigkeit:* Nehmen wir an, es gibt zu $G$ ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet $G'$ derart, dass den infinitesimal kleinen regulären Sechsecken mit demselben Trägheitsmoment in $G$ reguläre Sechsecke in $G'$ entsprechen. Man erkennt sofort, dass dies äquivalent mit der Existenz einer konformen Abbildung von $G$ auf $G'$ ist. Eine solche kann aber nur durch in $G$ analytische Funktionen geleistet werden; das lineare «Vergrösserungsmass» ist bekanntlich gleich dem absoluten Betrag der Ableitung im betreffenden Punkt. Eine solche abbildende Funktion sei mit $f(z)$ bezeichnet. Dann darf

$$[p(x, y)]^{-\frac{1}{4}} = | f'(z) | \qquad (z = x + i\, y)$$

gesetzt werden. Wegen der Konformität muss in $G$ $f'(z) \neq 0$ sein. Damit ist auch die Notwendigkeit von (1) bewiesen.

Zum Schluss seien einige Folgerungen erwähnt.

Aus dem Maximumprinzip der Funktionentheorie ergibt sich, dass sich die Niveaulinien $p(x, y) = K$ nicht schliessen können. Daher ist es unmöglich, eine Figur mit lauter «fast regulären» Sechsecken von denselben Trägheitsmomenten zu zeichnen, wenn die Belegungsfunktion radial abnimmt. Dies wird aber möglich, wenn wir $G$ längs einer Linie aufschneiden und auf die Konformität längs des Schnittes verzichten (Figur).

A. Heppes und P. Szüsz (Budapest)

# Aufgaben

**Aufgabe 361.** Gegeben sei ein Dreieck $A\,B\,C$ mit den Seiten $a, b, c$ und dem Höhenschnittpunkt $H$. Wir bezeichnen seine Höhenfusspunkte mit $H_a$, $H_b$, $H_c$, die Fusspunkte der aus diesen Punkten auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit $H_{ab}$, $H_{ac}$, $H_{bc}$, $H_{ba}$, $H_{ca}$, $H_{cb}$ und die 12 Fusspunkte der aus diesen Punkten erneut auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit $H_{pqr}$. Hier gibt $H_{pq}$ $(p, q = a, b, c)$ jeweils den Ausgangspunkt an; $r$ bezeichnet die Dreiecksseite, auf die das Lot gefällt wurde. Es soll gezeigt werden:

1. *Die Quadrupel $H_{cab}\, H_{cba}\, H_{aba}\, H_{bab}$ usw. sind jeweils die Ecken von Kreisvierecken, deren Mittelpunkte $A^*$, $B^*$, $C^*$ seien.*
2. *Die Höhen des Dreiecks $A^*B^*C^*$ gehen bzw. durch die Ausgangspunkte $A$, $B$, $C$.*

Karl Wanka, Wien

*Lösung:* Aus den Streckenverhältnissen

$$\overline{CH_{ab}} : \overline{CH_{ba}} = b : a \text{ und } \overline{CH_{cb}} : \overline{CH_{ca}} = a : b$$

folgt $\overline{CH_{ab}} \cdot \overline{CH_{cb}} = \overline{CH_{ba}} \cdot \overline{CH_{ca}}$. Die Punkte $H_{ab}$, $H_{cb}$, $H_{ca}$, $H_{ba}$ liegen demnach auf einem Kreis. Daraus ergibt sich, dass auch die durch Normalprojektion dieser Punkte auf $a$ bzw. $b$ hervorgehenden Punkte $H_{aba}$, $H_{cba}$, $H_{cab}$, $H_{bab}$ Ecken eines Kreisvierecks sind. Die 1. Behauptung ist damit bereits bewiesen. Da auch von den Punktequadrupeln $H_{ca}H_{ba}H_{bc}H_{ac}$ und $H_{bc}H_{ac}H_{ab}H_{cb}$ jedes für sich einem Kreis angehört und da auch die Potenzlinien der drei Kreise das Dreiseit $abc$ bilden, also nicht durch einen Punkt gehen, liegen alle sechs Punkte $H_{pq}$ auf einem und demselben Kreis. Sein Mittelpunkt sei $M$; die Fusspunkte der aus $M$ auf die Dreiecksseiten $a$, $b$, $c$ gefällten Lote seien $M_a$, $M_b$, $M_c$. Nun halbiert beispielsweise $M_a$ die Kreissehne $H_{ca}H_{ba}$, woraus hervorgeht, dass die von $M_a$ aus auf $b$ gefällte Normale die Symmetrale der Strecke $\overline{H_{cab}H_{bab}}$ ist. $C^*$ ergibt sich somit als Schnittpunkt der von $M_a$ und $M_b$ auf $b$ bzw. $a$ gefällten Lote.

In entsprechender Weise werden die Punkte $A^*$ und $B^*$ gefunden. Das Sechseck $A^*M_cB^*M_aC^*M_b$ setzt sich aus den drei Parallelogrammen $C^*M_bMM_a$ usw. zusammen;