Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

est une somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux et, d'après le lemme 1, il n'y a qu'une telle décomposition. La condition de notre théorème est donc suffisante.

Soit maintenant n un nombre impair et supposons que n admet et une seule décomposition en somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, soit $n = a^2 + b^2$. Soit p un diviseur premier du nombre n: ce sera donc un nombre impair. S'il était $p = 4t + 3$, alors, vu que $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$, en élévant les deux côtés de cette congruence à la puissance à l'exposant

$$\frac{p-1}{2} = 2t + 1,$$

on aurait $a^{p-1} \equiv -b^{p-1} \pmod{p}$; or, d'après le théorème de FERMAT, vu que, d'après $(a, b) = 1$ et $p \mid a^2 + b^2$, on a $(a, p) = (b, p) = 1$, on trouve $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. On aurait donc $1 \equiv -1 \pmod{p}$, donc $p \mid 2$, ce qui est impossible. Tout diviseur premier du nombre n est donc de la forme $4t + 1$, et le nombre n a le développement en facteurs premiers $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$, où k et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des nombres naturels et q_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ sont des nombres premiers distincts, chacun de la forme $4t + 1$. S'il était $k = 1$, notre théorème serait évidemment démontré. Supposons donc que $k > 1$. Tous deux des nombres $q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2}, \dots, q_k^{\alpha_k}$ sont évidemment premiers entre eux et, d'après le lemme 2, chacun d'eux est une somme de deux carrés de nombres naturels premiers entre eux. D'après le corollaire du lemme 3 il en résulte que le nombre n admet au moins deux décompositions en somme de deux carrés de nombres naturels premiers entre eux qui diffèrent non seulement par l'ordre des termes – contrairement à l'hypothèse sur le nombre n. Nous avons ainsi démontré qu'il ne peut pas être $k > 1$. On a donc $k = 1$ et notre théorème se trouve démontré.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

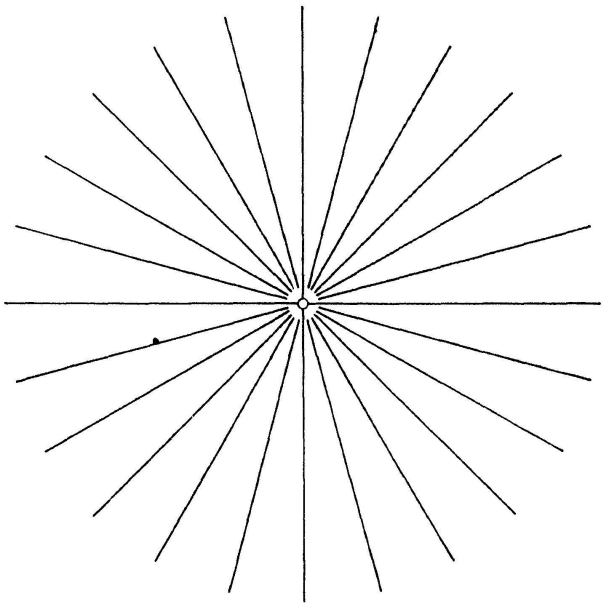
Ungelöste Probleme

Nr. 39. Unter einer räumlichen vollständigen und richtungsstetigen Geradenschar verstehen wir eine Gesamtheit von Geraden des gewöhnlichen Raumes mit den folgenden beiden Eigenschaften:

a) Zu jeder Geraden des Raumes enthält die Gesamtheit genau eine parallele Gerade;
b) die Geraden der Gesamtheit ändern sich stetig mit ihrer Richtung.

Ein Geradenbüschel, also die Gesamtheit aller durch einen festen Raumpunkt hindurchlaufenden Geraden, bilden ein besonders einfaches Beispiel einer vollständigen richtungsstetigen Geradenschar. Man überlegt sich aber leicht, dass es andere nichttriviale Scharen der verlangten Art gibt. Unsere Bilder deuten zwei ebene Scharen an, die durch Rotation um die vertikale Symmetrieachse zwei räumliche vollständige richtungsstetige Geradenscharen erzeugen. Figur 1 stellt die triviale ebene Schar (Geradenbüschel) dar, die bezogen auf ein cartesisches Koordinatensystem und den Parameter a durch

$$(\sin a)x - (\cos a)y = 0 \qquad [0 \leqslant a < \pi]$$



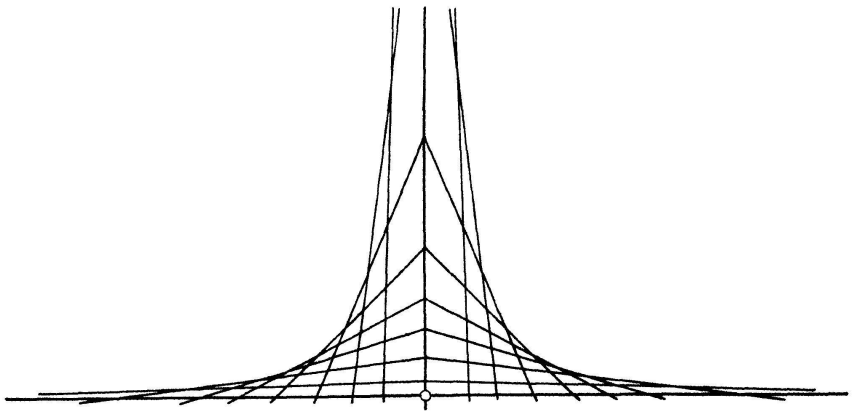
Figur 1

gegeben ist. Figur 2 illustriert die Schar (Gesamtheit der Tangenten an die Kurve $y = 4/x^2$ inkl. Asymptoten)

$$(\sin a)x - (\cos a)y + 3\,[\sin^2 a \cos a]^{1/3} = 0 \qquad [0 \leqslant a < \pi]\,.$$

Es zeigt sich, dass sich über Geradenscharen der hier in Betracht gezogenen Art recht starke Aussagen machen lassen, die wir zur elementaren Stetigkeitsgeometrie rechnen. So lässt sich beispielsweise zeigen, dass eine solche Schar den ganzen Raum überdeckt, so dass also durch jeden Raumpunkt wenigstens eine Schargerade hindurchgehen muss. Ferner enthalten zwei verschiedene Scharen stets wenigstens eine gemeinsame Gerade[1]). Vermutlich gilt der folgende Satz:

Eine räumliche vollständige und richtungsstetige Geradenschar enthält stets drei Geraden, die paarweise orthogonal sind und sich in einem Punkt treffen.



Figur 2

Es muss zugegeben werden, dass die Aussage etwas unwahrscheinlich klingt, da recht viel verlangt ist. Andererseits gibt es einige Indizien für die Richtigkeit des Satzes. Kann das Problem geklärt werden? H. HADWIGER

[1]) Über passende Beweisverfahren vgl. man den Aufsatz: *Kleine Studie zur elementaren Stetigkeitsgeometrie.* J'ber. DMV 1961 (zur Zeit im Druck).