Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes

Autor(en): **Schopp, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21904

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Man findet also $K(3) = 22$. (Unter den 22 verschiedenen Konfigurationen gibt es eine einzige, welche nicht durch Drehungen allein in alle zu ihr kongruenten übergeführt werden kann, wo also eine Spiegelung notwendig ist. Welche?) Wegen der Dualität des Kalküls würde es genügen, die Tabelle bis und mit $p = 4$ aufzustellen. Um Repräsentanten für die restlichen Klassen zu finden, hätte man lediglich die dual entsprechenden Ausdrücke zu negieren. P. LÄUCHLI, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] I. M. BOCHEŃSKI, *Formale Logik*, Sammlung Orbis Academicus (Verlag Karl Alber, Freiburg-München 1956).
[2] G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic* (London, Cambridge 1847).
[3] D. HILBERT und W. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 4. Aufl. (Springer, Berlin 1959).
[4] D. HILBERT und P. BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik* (Springer, Berlin 1939).
[5] W. KÄMMERER, *Ziffernrechenautomaten* (Akademie-Verlag, Berlin 1960).
[6] D. SLEPIAN, *On the Number of Symmetry Types of Boolean Functions of n Variables*, Canad. J. of Math. *5* (1953).
[7] *Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits*, The Annals of the Computational Laboratory of Harvard University, Vol. 27.

Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes

Von HADWIGER stammt der folgende bekannte Satz:

Die ebene Menge solcher Kreise von gleichem Durchmesser, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, lässt sich in drei Teilmengen so zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt besitzen [1][1]).

Es ist auch bekannt, dass die Punktmenge einer abgeschlossenen Orbiforme vom Durchmesser d sich mit genau so vielen abgeschlossenen Kreisbereichen vom Durchmesser d abdecken lässt, wie sich die Menge von abgeschlossenen Kreisbereichen vom gleichen beschränkten Durchmesser in solche Teilmengen zerlegen lässt, dass die zu jeder Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen [2].

Eine Orbiforme vom Durchmesser d lässt sich aber bekanntlich sogar mit 3 Kreisen vom Durchmesser $d\sqrt{3}/2$ abdecken [3], [4].

Diese letzterwähnte Behauptung ermöglicht die Verschärfung des Satzes von HADWIGER [1].

Sei M die Menge derjenigen abgeschlossenen Kreisbereiche K_α ($\alpha \in A$) vom Durchmesser d der euklidischen Ebene, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen, das heisst, wenn $K_\alpha \in M$ und $K_\beta \in M$, dann gilt $K_\alpha \cap K_\beta \neq 0$, wenn $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta \in$ A). Eine Kreismenge M heisst vollständig, wenn keine solche Kreismenge M' existiert, welche die gleichen Bedingungen wie M erfüllt und eine echte Teilmenge von M bildet. Im folgenden setzen wir voraus, dass die vorkommenden Kreismengen immer vollständig sind. Es ist noch zu erwähnen, dass eine Punktmenge sich auch als Kreismenge von Nullkreisen betrachten lässt.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 14.

Bezeichnen wir mit O_α ($\alpha \in A$) den Mittelpunkt des Kreisbereiches K_α, so folgt aus der Ausgangsbedingung:

$$\overline{O_\alpha O_\beta} \leqq d\,. \tag{1}$$

Sei M^* die Punktmenge der Mittelpunkte O_α der Kreisbereiche K_α, so folgt aus (1), dass M^* eine abgeschlossene ebene Punktmenge von konstanter Breite d – einen abgeschlossenen Orbiformbereich vom Durchmesser d – darstellt.

Diese Orbiforme lässt sich aber, wie oben erwähnt, mit drei Kreisen vom Durchmesser $d\sqrt{3}/2$ abdecken.

Bezeichnen wir diese drei Abdeckungskreise mit C_i ($i = 1, 2, 3$), ihre Mittelpunkte mit P_i. Offenbar gehört in diesem Fall zu jedem Element α von A ein solches i ($i = 1, 2, 3$), dass $O_\alpha \subset C_i$. Hieraus folgt, dass der Abstand zwischen O_α und dem Mittelpunkt P_i des Abdeckungskreises C_i den Halbdurchmesser von C_i nicht überschreitet:

$$\overline{O_\alpha P_i} \leqq d\sqrt{3}/4\,. \tag{2}$$

Bezeichnen wir ferner mit C_i^* ($i = 1, 2, 3$) den Kreis mit dem Mittelpunkt P_i und mit dem Halbdurchmesser

$$r^* = d/2 - d\sqrt{3}/4 = d(2-\sqrt{3})/4 \approx 0{,}06698\,d\,,$$

so folgt aus (2), dass

$$C_i^* \subset K_\alpha\,.$$

Hieraus folgt:

Satz I. *Die vollständige Menge derjenigen abgeschlossenen ebenen Kreisbereiche vom Durchmesser d, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, lässt sich in drei Teilmengen so zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen Durchschnitt besitzen, der einen abgeschlossenen Kreisbereich vom Durchmesser $d^* \leqq d(2-\sqrt{3})/2 \approx 0{,}13397\,d$ enthält.*

Obiger Satz enthält den Hadwigerschen Satz (für $d^* = 0$).

Der Wert des Durchmessers d^* lässt sich nicht mehr vergrössern, da eine Orbiforme vom Durchmesser d sich im allgemeinen mit drei Kreisen, deren Durchmesser kleiner als $d\sqrt{3}/2$ ist, nicht abdecken lässt (zum Beispiel ein Kreis vom Durchmesser d).

Aus Satz I folgt ein anderer, wesentlich gleichbedeutender Satz. Sei $\overline{M}$ die vollständige ebene Menge der Kreisbereiche $\overline{K}_\alpha$ ($\alpha \in A$) mit dem Mittelpunkt O_α und mit dem Halbdurchmesser $\overline{r} = d\sqrt{3}/4$. So folgt aus (2), dass zu jedem Element α von A ein solches i ($i = 1, 2, 3$) gehört, dass

$$P_i \subset \overline{K}_\alpha\,. \tag{3}$$

Die Kreisbereiche $\overline{K}_\alpha$ der Menge $\overline{M}$ lassen sich also mit drei Punkten abstechen. Die abgeschlossenen Kreisbereiche $\overline{K}_\alpha$ besitzen im allgemeinen keinen nichtleeren Durchschnitt, es gilt jedoch

$$\sup\,(\inf\,\overline{QR}) \leqq d(2-\sqrt{3})/2\,, \tag{4}$$

falls $Q \in \overline{K}_\alpha$ und $R \in \overline{K}_\beta$ ($\alpha, \beta \in A$; $\alpha \neq \beta$). Nach einfacher Rechnung folgt aus (3) und (4) der

Satz II. *Die vollständige ebene Menge derjenigen abgeschlossenen Kreisbereiche vom Durchmesser d, die paarweise den Abstand* $t \leqq d(2\sqrt{3}-3)/3$ *aufweisen, lässt sich in drei Teilmengen so zerlegen, dass die zu derselben Teilmenge gehörigen Kreisbereiche sämtlich einen nichtleeren Durchschnitt besitzen.* J. SCHOPP, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. HADWIGER–H. DEBRUNNER, *Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene*, Enseignement mathématique *1*, IIe Série, 75 (1955).
[2] J. SCHOPP, *Über den Zusammenhang zwischen zwei Abdeckungsproblemen von n-dimensionalen Hyperkugelbereichen*, Elemente der Mathematik *16*, 35–37 (1961).
[3] D. GALE, *On Inscribing n-Dimensional Sets in a Regular Simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. *4*, 222–225 (1953).
[4] H. LENZ, *Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers*, Arch. Math. *7*, 34–40 (1956).

Ungelöste Probleme

Nr. 41. Wie bekannt ist, lässt sich jeder Eilinie der Ebene (geschlossene konvexe Jordankurve) ein Quadrat einbeschreiben (vgl. Figur 1). Ein neuerer Beweis hierfür stammt von C. M. CHRISTENSEN[1]). Das Problem stellt sich, ob die gleiche Möglichkeit bei einer beliebigen geschlossenen Jordankurve (topologisches Kreisbild) der Ebene besteht (vgl. Figur 2). In der Tat wurde von verschiedener fachkundiger Seite versucht, diese Frage zu entscheiden. Mit Wahrung der angegebenen grösstmöglichen Allgemeinheit scheint die Lösung des Problems recht schwierig zu sein. Von L. G. SCHNIRELMANN[2]) konnte ein Beweis gefunden werden, dass die fragliche Einbeschreibbarkeit dann besteht, wenn die Jordankurve überall eine stetige Krümmung aufweist. Herr V. L. KLEE (Seattle, USA) hat uns einige interessante Vermerkungen zu unserm Problem zur Verfügung gestellt. Viele Lösungsversuche sind bisher gescheitert. Auch ein publizierter Beitrag von C. S. OGILVY[3]) kann lediglich als heuristische Betrachtung gewertet werden.

Nimmt man zunächst Zuflucht zu einem rein graphischen Verfahren, das heisst, sucht man eine Lösung durch «probieren», so wird man bald merken, dass das Experiment bei einer bereits vorgezeichneten Kurve nicht besonders leicht zum erfolgreichen Ende führt. Viele zeichnerisch gefundene positive Lösungen, die natürlich nur als Näherungen zu bewerten sind, ergeben insgesamt höchstens ein Indiz für die Gültigkeit des vermuteten Sachverhalts. In einem bekannten originellen Buch von H. STEINHAUS[4]) findet man (auf Seite 87) ein Bild, das vier Orte an der Uferlinie des Michigansees zeigt, die ein Quadrat bilden. – Zum Schlusse wollen wir den vermuteten Satz in eine vollständig arithmetisierte Form kleiden, wobei wir keineswegs etwa glauben, dass dadurch die Auffindung des noch fehlenden Beweises erleichtert wird. Eine solche gleichwertige Formulierung, die also ohne geometrische Begriffe auskommt, lautet beispielsweise wie folgt: Es seien $x = x(t)$ und $y = y(t)$ zwei im Inter-

[1]) Ein in eine konvexe Figur einbeschriebenes Quadrat (dänisch), Mat. Tidsskr. B 1950, 22–26.
[2]) Über gewisse geometrische Eigenschaften geschlossener Kurven (russisch), Uspehi Matem. Nauk *10*, 34–44 (1944).
[3]) Square inscribed in arbitrary simple closed curve, Amer. Math. Monthly *57*, 423–424 (1950).
[4]) Mathematical Snapshots, Oxford Univ. Press 1951.