Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 17 (1962)
Heft: 2

Artikel: Prüfung einer Kreisform mit Hohlwinkel und Taster
Autor: Schaal, Hermann
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21909

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

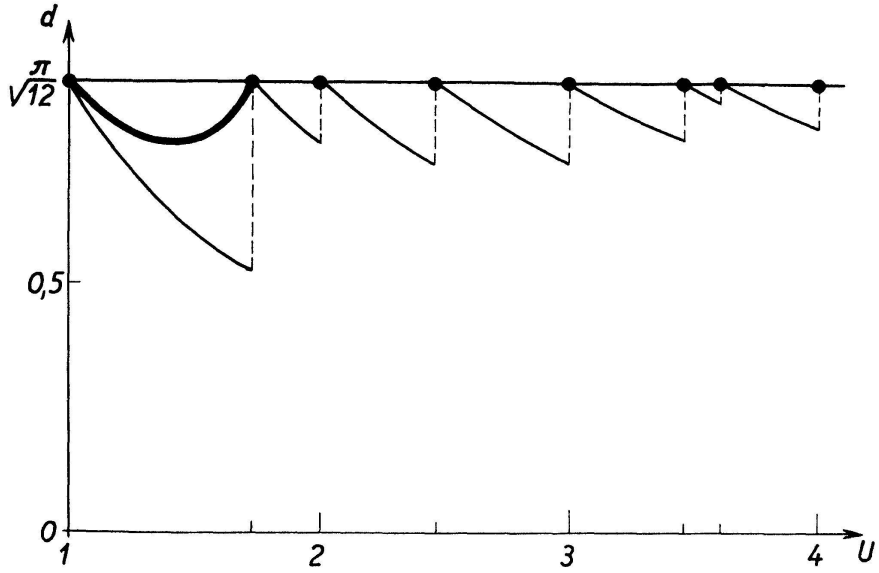
Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

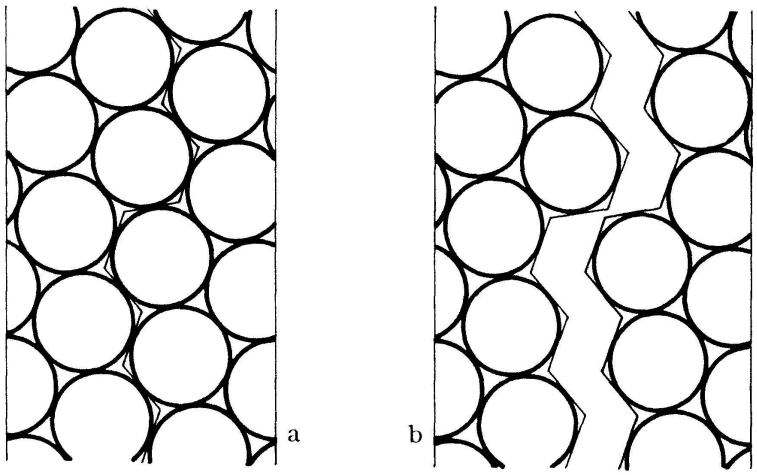
Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

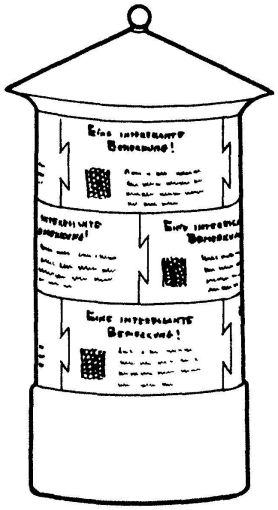
Zylinder entlang einer die Kreise nicht schneidende, «monoton steigende» Kurve aufschneidet und einen (unausgenützten) Streifen von der Breite $U - U_n$ einsetzt (Figur 6).



Figur 5



Figur 6



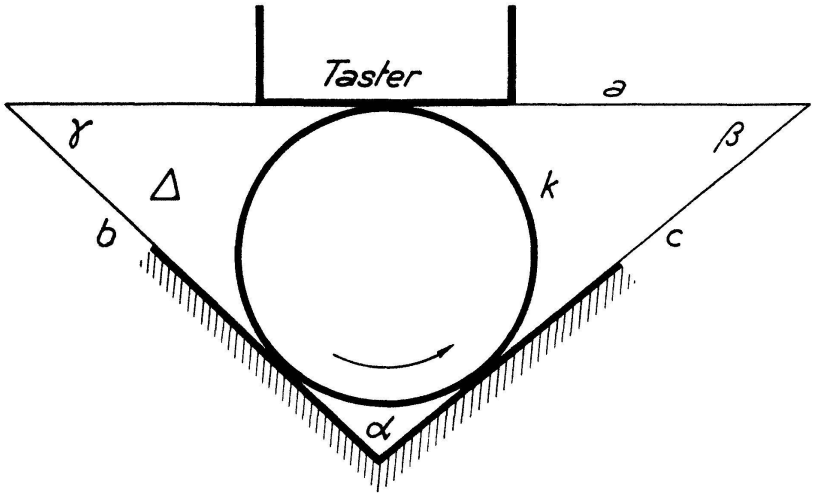
Figur 7

Aus unserer letzten Erwägung folgt, dass eine Menge konvexer «Plakate», die auf einer gewissen Plakatsäule Platz haben, stets auch auf eine gleich hohe, aber breitere Säule aufgeklebt werden können. Es ist interessant, zu bemerken, dass diese trivial klingende Behauptung für nicht konvexe Plakate nicht mehr gilt. Dies leuchtet an Hand der in Figur 7 dargestellten Plakate ein. L. FEJES TÓTH, Budapest

Prüfung einer Kreisform mit Hohlwinkel und Taster

1. F. HOHENBERG beschreibt in [1, S. 164f.] eine Anordnung, mit der geprüft werden kann, ob *der Querschnitt k* eines zylindrischen Werkstückes *ein Kreis* ist. Das Werkstück wird in einem Hohlwinkel α gedreht und dabei von einem Taster berührt; α, β, γ seien die Innenwinkel des von Hohlwinkel und Taster gebildeten Dreiecks Δ (Figur 1). Bleibt bei der Drehung der Taster in Ruhe, so ist nach einem

Satz von M. FUJIWARA [2, S. 50] k notwendig dann ein Kreis, wenn wenigstens einer der Quotienten α/π, β/π, γ/π irrational ist. Sind diese dagegen sämtlich rational, so gibt es beliebig viele und in gewissen Grenzen sogar beliebig gestaltete, nicht kreisförmige Querschnitte k, für die der Taster bei Drehung des Werkstückes ebenfalls in Ruhe bleibt.



Figur 1

M. FUJIWARA hat einen längeren Beweis dieses Satzes für ein beliebiges konvexes m-Eck angegeben. Es genügt jedoch, einen Beweis für $m = 3$ zu führen; die Gültigkeit für $m > 3$ folgt daraus unmittelbar, sogar für nicht konvexe Polygone. Durch verschiedene bemerkenswerte Vereinfachungen wird der Nachweis dieses merkwürdigen Sachverhaltes sehr durchsichtig, so dass eine neue Darstellung lohnend erscheint.

2. Wir betrachten jene *ebene Bewegung*, bei der das starre Dreieck Δ um die konvexe Kurve k so herumgeführt wird, dass dabei k die Seiten von Δ ständig berührt.

Die Seiten a, b, c von Δ seien im Sinne des positiven Umlaufes von Δ orientiert, und a bilde mit der y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems (x, y) den orientierten Winkel u. Die Stützfunktion $p(u)$ von k sei stückweise zweimal stetig differenzierbar und durch ihre Fourierentwicklung

$$p(u) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu u + b_\nu \sin \nu u) \tag{1}$$

gegeben. Liegt k im Innern von Δ, und ist ϱ_0 der Inkreisradius von Δ[1]), so schneiden sich die drei zu a, b, c im Abstand ϱ_0 parallelen Geraden

$$\begin{aligned}
&x \cos u && + y \sin u && - p(u) && + \varrho_0 = 0\,, \\
&x \cos(u + \pi - \gamma) && + y \sin(u + \pi - \gamma) && - p(u + \pi - \gamma) && + \varrho_0 = 0\,, \\
&x \cos(u - \pi + \beta) && + y \sin(u - \pi + \beta) && - p(u - \pi + \beta) && + \varrho_0 = 0
\end{aligned} \tag{2}$$

im Inkreismittelpunkt von Δ. Die Determinante von (2) muss daher verschwinden, und zwar für alle Werte u. Dies ergibt unter Verwendung der Aussenwinkel $\alpha' = \pi - \alpha$,

[1]) Liegt k im Äusseren von Δ, so tritt anstelle des Inkreisradius der zugehörige Ankreisradius von Δ, und zwei der Innenwinkel sind durch ihre Nebenwinkel zu ersetzen. Von den Bezeichnungen abgesehen wird dabei am Folgenden nichts geändert.

$\beta' = \pi - \beta$, $\gamma' = \pi - \gamma$ die folgende Identität in u als *notwendige und hinreichende Bedingung* für die Kurven k:

$$[p(u) - \varrho_0] \sin\alpha' + [p(u + \gamma') - \varrho_0] \sin\beta' + [p(u - \beta') - \varrho_0] \sin\gamma' = 0 . \tag{3}$$

Aus (1) und (3) erhält man für die Fourierkoeffizienten die Gleichungen

$$(a_0 - \varrho_0)(\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma') = 0 \tag{4}$$

und

$$\begin{aligned} a_\nu F_\nu(\alpha', \beta', \gamma') - b_\nu G_\nu(\beta', \gamma') &= 0 , \\ a_\nu G_\nu(\beta', \gamma') + b_\nu F_\nu(\alpha', \beta', \gamma') &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned} F_\nu &= \sin\alpha' + \cos\nu\beta' \sin\gamma' + \cos\nu\gamma' \sin\beta' , \\ G_\nu &= \sin\nu\beta' \sin\gamma' - \sin\nu\gamma' \sin\beta' . \end{aligned} \tag{6}$$

Da in (4) der zweite Faktor für die Winkel eines Dreiecks nie verschwindet, ist

$$a_0 = \varrho_0 ; \tag{7}$$

das Absolutglied der Fourierreihe (1) *ist also gleich dem Inkreisradius des Dreiecks* Δ.

Alle möglichen Kurven k haben bei einem gegebenen Dreieck Δ *denselben Umfang* $L = 2\pi a_0$, denn unter Verwendung des Krümmungsradius

$$\varrho = p(u) + p''(u) \tag{8}$$

folgt

$$L = \int_0^{2\pi} \varrho \, du = \int_0^{2\pi} p(u) \, du , \tag{9}$$

und das zweite Integral hat nach den Formeln von EULER-FOURIER den Wert $2\pi a_0$[2]).

Die Gleichungen (5) haben nichttriviale Lösungen a_ν, b_ν nur für

$$F_\nu^2 + G_\nu^2 = 0 , \tag{10}$$

also nur für

$$F_\nu = 0 , \qquad G_\nu = 0 . \tag{11}$$

Aus (6) und (11) folgt, wenn man wieder α, β, γ einführt und beachtet, dass $\sin\nu\alpha$, $\sin\nu\beta$, $\sin\nu\gamma$ nicht verschwinden können:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\nu\alpha : \sin\nu\beta : \sin\nu\gamma . \tag{12}$$

Da $\nu(\alpha + \beta + \gamma) = \nu\pi$ ist, sind $\nu\alpha, \nu\beta, \nu\gamma \pmod{\pi}$ die Innenwinkel oder die Aussenwinkel eines Dreiecks, und je nachdem sei $\varepsilon = +1$ bzw. $\varepsilon = -1$ in (13). Nach (12) ist dieses Dreieck zu Δ ähnlich; sind k, k', k'' drei gerade oder drei ungerade Zahlen, so gilt also:

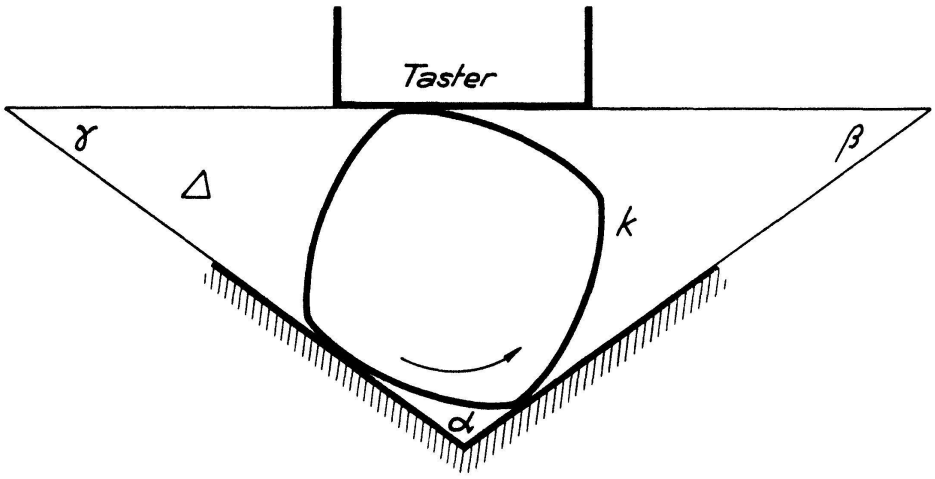
$$\nu\alpha = \varepsilon\alpha + k\pi , \qquad \nu\beta = \varepsilon\beta + k'\pi , \qquad \nu\gamma = \varepsilon\gamma + k''\pi . \tag{13}$$

---

[2]) M. FUJIWARA kommt auf längerem Wege zum selben Ergebnis; dieses kann als Verallgemeinerung des Satzes von BARBIER gelten, nach dem alle Gleichdicke der Breite $2a_0$ den Umfang $L = 2\pi a_0$ besitzen (vgl. [4]). Dieselbe Eigenschaft haben nach E. MEISSNER [3, S. 313] allgemeiner auch jene konvexen Kurven c_n, für die alle umschriebenen n-Ecke mit gleichen Aussenwinkeln bei gegebenem n denselben Polygonumfang haben.

Für $\nu = 1$ ist (11) stets erfüllt; für $\nu > 1$ kann (11) wegen (13) nur dann erfüllt werden, wenn α/π und β/π und γ/π rational sind (*Fall A*). Der Hauptnenner dieser Brüche sei q; sind für diesen alle drei Zähler ungerade, setzen wir $n = q$, andernfalls $n = 2\,q$. Dann folgt aus (13) weiter

$$\nu \equiv \pm 1 \pmod{n}\,. \tag{14}$$



Figur 2

Im Fall A müssen also für $\nu > 0$ alle a_ν, b_ν mit $\nu \equiv \pm 1$ (n) verschwinden. Die übrigen können – sofern sie den Konvergenzbedingungen der Fourierreihe (1) genügen und sofern die Bedingung $\varrho = p(u) + p''(u) > 0$ für Konvexität erfüllt ist – beliebig gewählt werden, denn mit (11) ist (5) erfüllt und damit auch die hinreichende Bedingung (3). *Daher gibt es im Fall A ausser dem Kreis beliebig viele andere Kurven k als Querschnitt des zylindrischen Werkstückes, für die der Taster des Prüfgerätes beim Drehen des Werkstückes in Ruhe bleibt*[3]). Ist beispielsweise $\alpha = 3\,\pi/5$, $\beta = \gamma = \pi/5$ (Figur 2), also $q = n = 5$, dann erfüllt die Stützfunktion

$$p = 15 + \cos 4u \tag{15}$$

die Bedingung (14); ausserdem ist $\varrho = 15\,(1 - \cos 4\,u) \geqq 0$. Die durch (15) bestimmte Kurve k (Figur 2)

$$\begin{aligned} x &= 15 \cos u + 2{,}5 \cos 3u - 1{,}5 \cos 5u\,, \\ y &= 15 \sin u - 2{,}5 \sin 3u - 1{,}5 \sin 5u \end{aligned} \tag{16}$$

besitzt daher die genannte Eigenschaft; sie ist überdies Parallelkurve der 8-spitzigen Hypozykloide $p = \cos 4\,u$ im Abstand 15 (vgl. W. WUNDERLICH [6, S. 181]).

Ist dagegen einer der Quotienten α/π, β/π, γ/π irrational (*Fall B*), so ist (11) wegen (13) nur für $\nu = 1$ erfüllt. *Im Fall B müssen also alle a_ν, b_ν für $\nu > 1$ verschwinden, und k ist dann nach* (1) *notwendig ein Kreis.* Beispielsweise besitzt jedes von Punkten eines kartesischen Einheitsgitters gebildete, nicht gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck Δ nach H. HADWIGER und H. DEBRUNNER [9, S. 60–61] (vgl. auch H. HADWIGER [10, S. 98–100]) mindestens einen mit π inkommensurablen Winkel. *Bleibt*

[3]) Im *Fall A* sind übrigens a, b, c Seiten eines *regulären n-Ecks* P_n, und k ist eine sogenannte «*Gleitkurve*» *in* P_n; solche wurden schon mehrfach untersucht, unter anderem vom Verfasser in einer folgenden Arbeit. Ein umfangreiches Literaturverzeichnis hierüber findet man bei M. GOLDBERG [5].

Für $n = 2\,q$ ist k ein Gleichdick mit der Breite $2\,a_0$, denn für $n = 2\,q$ folgt aus (1) und (14) $p(u) + p\,(u + \pi) = 2\,a_0$.

bei solcher Wahl von Δ der Taster beim Drehen des Werkstückes in Ruhe, so ist der Querschnitt k also sicher ein Kreis.

3. Das in **2.** für ein *beliebiges Dreieck* Δ hergeleitete Ergebnis kann ohne Rechnung auf den allgemeinen Fall übertragen werden, bei dem anstelle von Δ ein *beliebiges m-Eck* Δ_m tritt ($m > 3$). Sind a, b, c drei beliebige Seiten von Δ_m, die ein Dreieck Δ bilden[4]), und trifft auf dieses *Fall B* zu, dann ist k notwendig In- bzw. Ankreis k_0 von Δ; gilt jedoch *Fall A*, so schneidet jede von a, b, c verschiedene Seite von Δ_m mindestens 2 Seiten von Δ und bildet mit diesen ein Dreieck Δ', auf das unser Ergebnis anzuwenden ist. Zunächst ergibt sich, dass Δ' wegen (7) mit Δ den Inkreis oder Ankreis gemeinsam hat. Daraus folgt, dass auch Δ_m einen In- oder Ankreis hat. Durch Betrachtung der Fälle A und B für jedes der Dreiecke Δ' erhält man für das *beliebige Polygon* Δ_m unmittelbar folgendes Ergebnis:

Ist k eine Kurve mit der Stützfunktion (1), *und kann k in einem beliebigen m-Eck Δ_m so bewegt werden, dass k ständig alle Seiten von Δ_m berührt, so besitzt Δ_m einen Inkreis k_0. Hat Δ_m zwei Seiten, deren Winkel mit π inkommensurabel ist, so ist k notwendig der Kreis k_0. Sind dagegen alle Winkel α_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) von Δ_m mit π kommensurabel, so gibt es vom Kreis k_0 verschiedene Kurven k; diese sind durch die Bedingung* (14) *charakterisiert*[5]).

Hieraus folgt, dass selbst eine *beliebige Anzahl von Tastern nicht ausreicht*, einen Querschnitt k exakt als Kreis zu bestimmen, wenn das von Tastern und Hohlwinkel gebildete Polygon *nur mit π kommensurable Winkel* besitzt.

Allerdings wird die «*Abweichung*» der Kurve k vom Kreis k_0 *beliebig klein*, wenn nur *n hinreichend gross* ist. Definieren wir nämlich als «*Abweichung*» $f(u)$ die Differenz der Stützfunktionen von k und k_0, also

$$f(u) = p(u) - a_0 - a_1 \cos u - b_1 \sin u\,, \tag{17}$$

so gilt nach der Vollständigkeitsrelation mit $\nu \equiv \pm 1(n)$, $\nu > 1$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(u)\, du = \sum_{\nu = n-1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)\,. \tag{18}$$

Zur Abschätzung der rechten Seite in (18) betrachten wir den Flächeninhalt F von k, der durch

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) du = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu^2 - 1)\,(a_\nu^2 + b_\nu^2) \tag{19}$$

gegeben ist[6]). Für konvexe k ist $F > 0$; daher gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu^2 - 1)\,(a_\nu^2 + b_\nu^2) < 2\, a_0^2\,. \tag{20}$$

---

[4]) Der Fall, dass Δ_m ein Parallelogramm ist, kann unbedenklich ausgeschlossen werden, da dieser Fall bekanntlich auf die Gleichdicke führt.

[5]) k_0 kann auch Ankreis des nicht notwendig konvexen Polygons Δ_m sein. Ausserdem gilt (14) auch für die nicht konvexen Parallelkurven von k. – M. FUJIWARA erwähnt nur konvexe Δ_m (vgl. auch [7, S. 81–82]).

[6]) Da k nach (9) den Umfang $L = 2\pi a_0$ hat, kann in (19) das isoperimetrische Defizit

$$\Delta = L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \cdot \sum_{\nu-1}^{\infty} (\nu^2 - 1)\,(a_\nu^2 + b_\nu^2)$$

von k abgelesen werden (vgl. zum Beispiel [8, S. 524]).

Da in (20) wegen $\nu \equiv \pm 1(n)$ nur Glieder für $\nu \geqq n-1$ auftreten, gilt erst recht

$$\sum_{\nu=n-1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2) < \frac{2\,a_0^2}{n(n-2)}. \tag{21}$$

Das Integral (18) strebt also gegen Null für $n \to \infty$ und wegen $f^2(u) > 0$ damit auch $f(u)$.

Da die Messgenauigkeit eine natürliche Grenze nicht unterschreiten kann, kommt der Praktiker also auch mit einer Prüfanordnung aus, bei der *sämtliche* α_i/π *rational* sind, wenn nur der Hauptnenner q von α_i/π und damit n *hinreichend gross* ist.

HERMANN SCHAAL, Stuttgart

LITERATUR

[1] HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Wien 1961.
[2] FUJIWARA, M.: Über die einem Vielecke eingeschriebenen und umdrehbaren konvexen geschlossenen Kurven. The Science Reports, Tôhoku University *4*, 43–55 (1915).
[3] MEISSNER, E.: Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik. Viertelj. d. naturf. Gesellsch. Zürich *54*, 309–329 (1909).
[4] BARBIER, E.: Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. J. Math. pures appl. (2) *5*, 273–286 (1860).
[5] GOLDBERG, M.: Rotors in Polygons and Polyhedra. Math. of Computation *14*, 229–239 (1960).
[6] WUNDERLICH, W.: Über eine Klasse zwangläufiger höherer Elementenpaare. Z. angew. Math. Mech. *19*, 177–181 (1939).
[7] JAGLOM, I. M.-BOLTJANSKI, W. G.: Konvexe Figuren. Berlin 1956.
[8] HURWITZ, A.: Mathematische Werke *I*. Basel 1932.
[9] HADWIGER, H. und DEBRUNNER, H.: Ausgewählte Einzelprobleme der kombinatorischen Geometrie in der Ebene. L'Enseignement Math. *1*, 56–89 (1955).
[10] HADWIGER, H.: Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. Elemente der Math. *1*, 98–100 (1946).

Ungelöste Probleme

Nr. 42. *Existe-t-il une infinité de nombres de* FERMAT $2^{2^n} + 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *dont le premier chiffre (dans la représentation décimale) est* $= 1$?

D'après un théorème que j'ai démontré dans mon article: *Sur les puissances du nombre 2*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, vol. *23*, 249 (1950), Théorème 2, m étant un nombre naturel quelconque et s le nombre des chiffres du nombre m (en représentation décimale), il existe un nombre naturel n tel que les s premiers chiffres du nombre $2^n + 1$ coincident respectivement avec les chiffres du nombre m. Une proposition analogue est-elle vraie pour les nombres de FERMAT?

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Kleine Mitteilungen

Eine stereometrische Dodekaeder-Konstruktion

mit inhärentem Existenz- und Regularitätsbeweis

L. LOCHER-ERNST hat in dieser Zeitschrift[1]) auf Lücken in der Schulbuchbehandlung des Dodekaeders hingewiesen. So mag es interessieren, dass man das Dodekaeder aus dem Würfel durch eine *räumliche* Konstruktion so gewinnen kann, dass darin – in der Art eines «indischen Beweises» – zugleich der Nachweis liegt, dass es regulär ist.

[1]) *Konstruktionen des Dodekaeders und Ikosaeders.* El. Math. *10*, 73–81 (1955).