Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der euklidischen Ebene

Autor(en): **Nohl, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **17 (1962)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21912

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

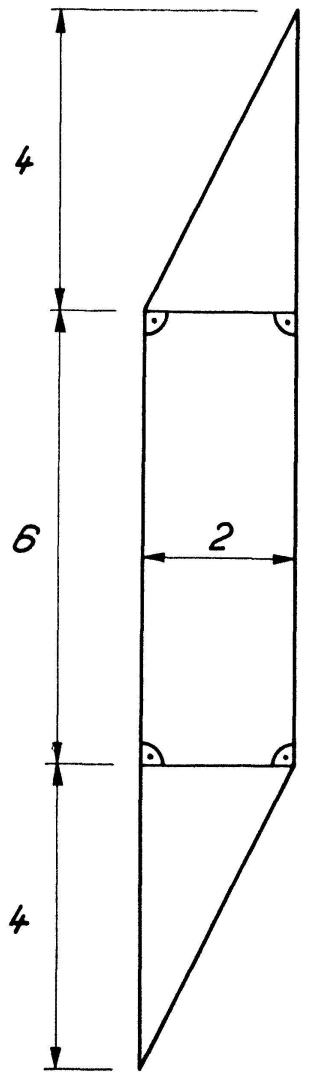
http://www.e-periodica.ch

Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der euklidischen Ebene

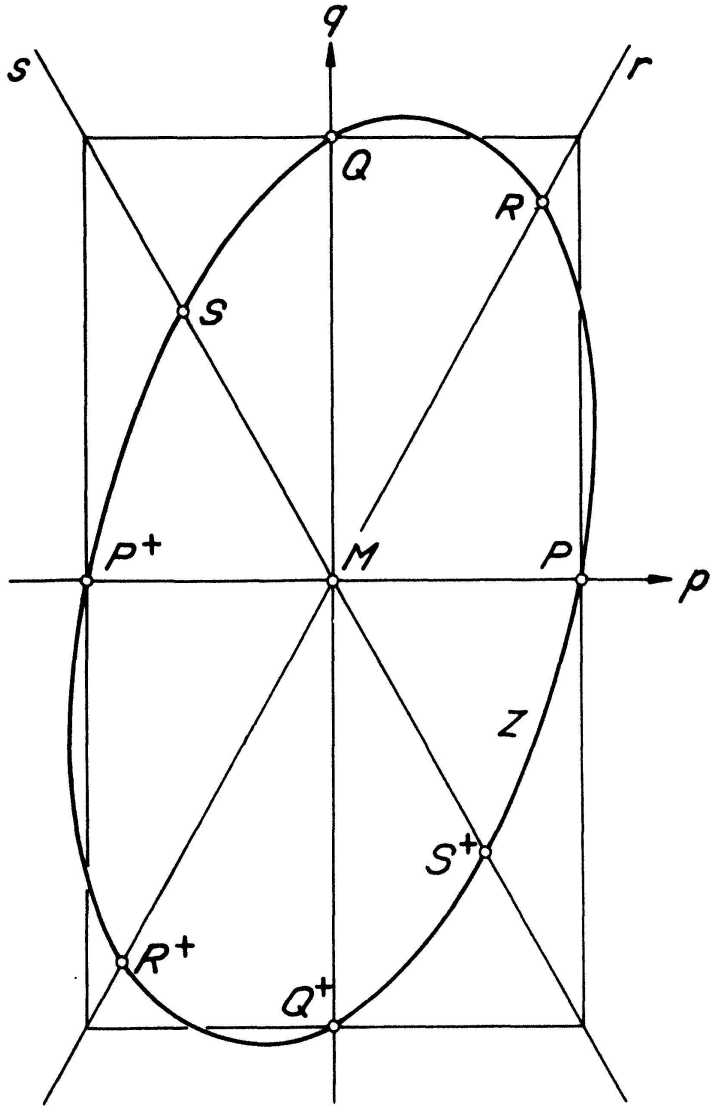
1. *Einleitung*

In mehreren Arbeiten, die in den letzten Jahren erschienen sind, werden Fragen, die die Messung der zentrischen Symmetrie bzw. Asymmetrie betreffen, behandelt. Im folgenden soll ein Problem untersucht werden, bei dem sowohl die Axialsymmetrie, wie die Zentralsymmetrie wesentlich beteiligt sind. Methodisch bleibt die Untersuchung völlig im Rahmen der Elementargeometrie. Es sei Z ein eigentlicher, endlicher, zentrischer Eibereich. A sei ein axialsymmetrischer Bereich, wobei $A \subset Z$ gelten soll. Wir bilden das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\alpha(Z, A) = \frac{F(A)}{F(Z)}. \tag{1.1}$$



Figur 1



Figur 2

Mit Hilfe des Auswahlsatzes von Blaschke schliesst man sofort, dass $\alpha(Z, A)$ bei festem Z für (mindestens) einen Bereich $A = A^*$ ein absolutes Maximum annimmt.

Es sei

$$\alpha(Z) = \max \alpha(Z, A) = \frac{F(A^*)}{F(Z)}. \tag{1.2}$$

$\alpha(Z)$ kann als ein Mass dafür angesehen werden, wie gut sich der gegebene Bereich Z von innen her axialsymmetrisch approximieren lässt. Für alle Bereiche Z, die bereits axialsymmetrisch sind, zum Beispiel für Kreis, Rechteck, Rhombus usw. nimmt $\alpha(Z)$ den maximal möglichen Wert 1 an. Über die untere Grenze von $\alpha(Z)$ gilt der folgende

Satz: *Für alle eigentlichen, endlichen, zentrischen Eibereiche Z hat das innere axiale Symmetriemass $\alpha(Z)$ mindestens den Wert $2(\sqrt{2}-1)$. Dieser minimale Wert wird bei speziellen Parallelogrammen angenommen.*

Figur 1 zeigt ein Parallelogramm der Extremalklasse.

Im folgenden soll der aufgestellte Satz bewiesen werden.

2. *Bestimmung einer unteren Schranke für $\alpha(Z)$*

a) Es sei Z der vorgegebene Eibereich. Durch sein Symmetriezentrum M sei das rechtwinklige Achsenpaar p, q gelegt, das mit dem Rand von Z die Schnittpunkte P, P^+, Q, Q^+ bildet (Figur 2). Legt man durch diese die Achsenparallelen, so entsteht ein Rechteck, durch dessen gegenüberliegende Ecken die Geraden r, s gelegt seien. Sie schneiden den Rand von Z in R, R^+, S, S^+.

Das Achteck $P\,R\,Q\,S\,P^+\,R^+\,Q^+\,S^+$ ist ebenfalls bezüglich M zentralsymmetrisch. Bei jedem Bereich Z existieren spezielle Drehlagen des Achsenkreuzes p, q, für die das erwähnte Achteck auch axialsymmetrisch ist bezüglich p und q.

Dreht man nämlich das Achsensystem bei festem Z um den Winkel ϑ, so werden die Abstände

$$\overline{MR} = f(\vartheta)$$

$$\overline{MS} = g(\vartheta),$$

sowie die Differenz

$$d(\vartheta) = f(\vartheta) - g(\vartheta)$$

stetige Funktionen des Drehwinkels ϑ. Da ausserdem gilt

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\,d(0)$$

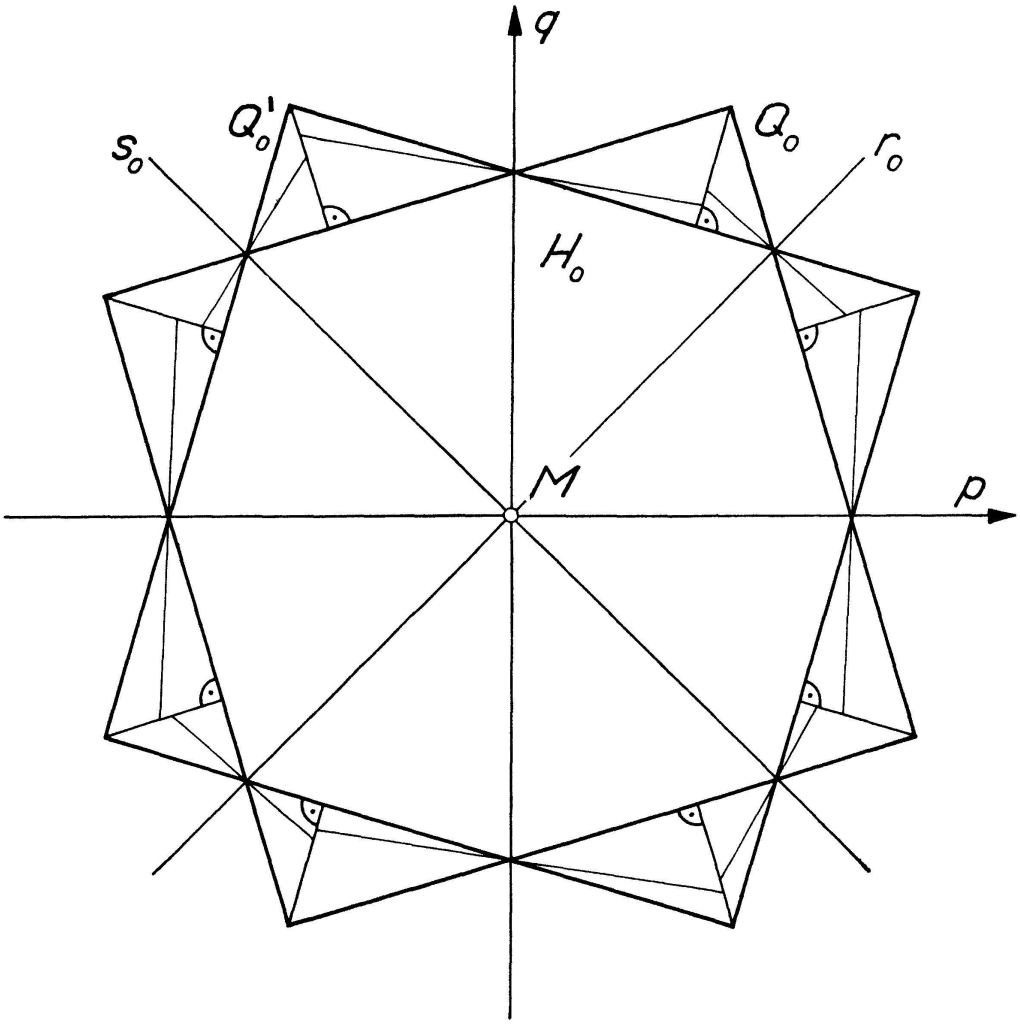
folgt, dass bei einer Drehung um $\pi/2$ die Funktion $d(\vartheta)$ mindestens einmal verschwinden muss, womit die Behauptung bewiesen ist. Ein in dieser Weise entstandenes Achteck sei als «Hauptachteck» H bezeichnet. Offenbar sind 2 Grenzfälle einzuschliessen:

1. $\overline{MR} = \overline{MS}$ ist gleich der halben Rechtecksdiagonalen. Das Hauptachteck entartet zum Rechteck.

2. $\overline{MR} = \overline{MS}$ ist gleich einem Viertel der Rechtecksdiagonalen. Das Hauptachteck entartet zu einem Rhombus.

b) Gemäss Abschnitt a) sei dem Bereich Z ein Hauptachteck H einbeschrieben. Die ganze Figur werde jetzt normalaffin in der Richtung der q-Achse gestreckt, so dass die Bildgeraden r_0 und s_0 zu den Halbierenden der durch p und q gebildeten rechten Winkel werden. (Figur 3). Das Verhältnis der Flächeninhalte von H und Z ist gegenüber der normalaffinen Abbildung invariant. Z gehe dabei in Z_0, H in H_0 über. H_0 kann als Durchschnitt zweier Quadrate Q_0 und Q_0' aufgefasst werden. In den oben erwähnten Grenzfällen fallen die beiden Quadrate zusammen.

c) Aus der Konvexität von Z_0 folgt, dass dieser Bereich ganz in der Vereinigungsmenge der Quadrate Q_0 und Q_0' enthalten sein muss. Teilt man in Figur 3 die 8 an H_0 angesetzten rechtwinkligen Dreiecke in der angegebenen Weise in Teildreiecke, und legt man durch jeden Eckpunkt von H_0 eine Stützgerade an Z_0, so erkennt man leicht, dass durch die Stützgeraden mindestens die Hälfte des Flächeninhalts der 8 Dreiecke weggeschnitten wird. Der Flächeninhalt von Z_0 ist also höchstens gleich dem Flächeninhalt von Q_0.



Figur 3

Man erhält damit für $\alpha(Z)$ die folgende Abschätzung:

$$\alpha(Z) = \max \frac{F(A)}{F(Z)} \geqq \frac{F(H)}{F(Z)} = \frac{F(H_0)}{F(Z_0)} \geqq \frac{F(H_0)}{F(Q_0)} \tag{2.1}$$

Falls H_0 ein reguläres Achteck ist, nimmt der letzte Quotient von (2.1) seinen tiefstmöglichen Wert, nämlich $2\,(\sqrt{2}-1)$ an. Es gilt also:

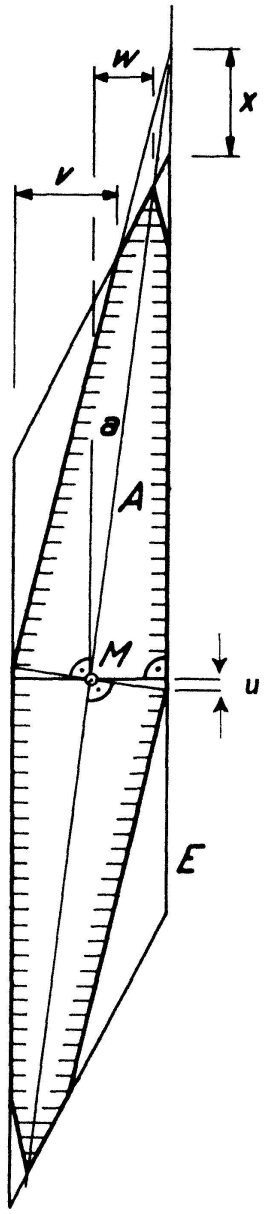
$$\alpha(Z) \geqq 2\,(\sqrt{2}-1) \tag{2.2}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

3. *Ein extremaler Bereich*

Wir zeigen jetzt an einem Beispiel, dass es extremale Bereiche gibt, für die in (2.2) das Gleichheitszeichen gilt.

Das Parallelogramm E von Figur 4 sei identisch mit dem Parallelogramm von Figur 1. Zur Berechnung von $\alpha(E)$ ist die Ermittlung eines optimalen axialsymmetrischen Bereiches A^* mit $A^* \subset E$ erforderlich. Ist a^* eine Symmetrieachse von A^* und spiegelt man E und A^* an a^*, so wird sofort ersichtlich, dass A^* mit dem Durchschnittsbereich $E \cap E_a^*$ zusammenfallen muss, wenn E_a^* das Spiegelbild von E bezüglich a^* darstellt. Es ist ferner zulässig, bei der Ermittlung einer optimalen Achse a^* nur diejenigen Achsen a zu berücksichtigen, die durch das Symmetriezentrum M laufen. Man zeigt nämlich leicht, dass die Spiegelung von E an einer solchen Achse zu einem Durchschnittsbereich $E \cap E_a$ führt, der flächenmässig sicher nicht kleiner ist als der entsprechende Durchschnittsbereich $E \cap E_{a'}$, den eine beliebige, zu a parallele Achse a′ liefert. Einfache weitere Überlegungen ergeben schliesslich, dass eine optimale Achse gefunden werden kann, wenn in Figur 4 die Unabhängige x von 0 bis $+\infty$ läuft. Der Flächeninhalt $F(A)$ des Durchschnittsbereiches $A = E \cap E_a$ wird jetzt zu einer Funktion von x.



Figur 4

Die Rechnung ergibt für die Hilfsgrössen u, v, w in Figur 4 die folgenden Resultate:

$$u = \frac{1}{x+7}\,; \quad v = \frac{2\,(3\,x+20)}{x^2+10\,x+20}\,; \quad w = \frac{5}{x+5}\,. \tag{3.1}$$

Setzt man noch

$$C = 40\,(\sqrt{2}-1)\,, \tag{3.2}$$

so erhält man

$$F(A) = C - \frac{4(x-5\sqrt{2})^2[(10\sqrt{2}-14)x^2+(80\sqrt{2}-111)x+(140\sqrt{2}-190)]}{x^4+22x^3+175x^2+590x+700}\,. \tag{3.3}$$

Aus (3.3) ist sofort ersichtlich, dass $F(A)$ für $x = 5\sqrt{2}$ maximal wird.

Für einen maximalen Bereich A^* gilt hier also

$$F(A^*) = C\,.$$

Mit (1.2) und (3.2) folgt:

$$\alpha(E) = \frac{F(A^*)}{F(E)} = \frac{C}{F(E)} = \frac{40\,(\sqrt{2}-1)}{20} = 2\,(\sqrt{2}-1)\,. \tag{3.4}$$

Damit ist der eingangs formulierte Satz bewiesen.

4. *Schlussbemerkungen*

Eine eingehendere Untersuchung lehrt, dass die Klasse der Extremalbereiche aus einer zweiparametrigen Schar von Parallelogrammen besteht. Diese Parallelogramme

entstehen aus Quadraten durch normalaffine Abbildung, wenn die Affinitätsrichtung zu zwei Quadratseiten den Winkel $\pi/8$ bildet und für das Affinitätsverhältnis k gilt:

$$k \geqq \sqrt{4\sqrt{2}+1}.$$

Kombiniert man unsern Satz mit einem Ergebnis von BESICOVITCH [2], so erhält man eine – vermutlich noch schlechte – untere Schranke für das innere axiale Symmetriemass eines beliebigen Eibereiches.

Der vorliegende Beweis wurde im Wintersemester 1960/61 im mathematischen Seminar in Bern vorgetragen. In der Diskussion ergaben sich verschiedene Verbesserungsvorschläge, insbesondere durch Beiträge von Herrn H. HADWIGER, die hier berücksichtigt sind, und die ich auch an dieser Stelle bestens verdanken möchte.

W. NOHL, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] FARY und RÉDEI: *Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern.* Math. Ann. *122*, 205–220 (1950).

[2] BESICOVITCH, A. S.: *Measure of Asymmetry of Convex Curves I.* J. London Math. Soc. *23*, 237–240 (1949).

[3] BESICOVITCH, A. S.: *Measure of Asymmetry of Convex Curves II.* J. London Math. Soc. *26*, 81–93 (1951).

Sur les nombres triangulaires qui sont sommes de deux nombres triangulaires

Le but de cette note est de démontrer la proposition suivante:

Théorème. *Pour qu'un nombre triangulaire* $t_n = [n(n+1)]/2$ *soit une somme de deux nombres triangulaires* > 0, *il faut et il suffit que le nombre* $n^2 + (n+1)^2$ *soit composé.*

Démonstration. Dans ma note parue dans les Elemente der Mathematik *16* (1961), p. 27, j'ai démontré que pour qu'un nombre impair soit d'une seule façon somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il soit une puissance à l'exposant naturel d'un nombre premier de la forme $4k+1$.

Si le nombre t_n serait une somme de deux nombres triangulaires > 0, il existerait des nombres naturels x et $y \geqq x$ tels que $t_n = t_x + t_y$, d'où

$$(2n+1)^2 + 1 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2,$$

ce qui donne $m = (n+1)^2 + n^2 = (x+y+1)^2 + (y-x)^2$.

Si m est un nombre premier, il n'est pas un carré et on a $y \neq x$. Les nombres $x+y+1$ et $y-x$ sont donc naturels et évidemment premiers entre eux (puisque m est un nombre premier) et on a $x+y+1-(y-x) = 2x+1 > 1$, d'où il résulte que m est de deux façons somme de deux carrés de nombres naturels non décroissants premiers entre eux, contrairement à mon théorème cité plus haut. Le nombre m ne peut pas donc être premier et, comme on a évidemment $m > 1$, m est un nombre composé. La condition de notre théorème est donc nécessaire.