Über eine gewisse Klasse von ganzen rationalen Funktionen 3. Grades

Autor(en): **Zuser, Karl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22644

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über eine gewisse Klasse von ganzen rationalen Funktionen 3. Grades

Wir betrachten ganze rationale Funktionen 3. Grades

$$f(x) = c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

und suchen die Lösung der folgenden Aufgabe:

Unter den betrachteten Funktionen $f(x)$ ermittle man alle mit der Eigenschaft, dass $f(x)$ und $f'(x)$ lauter ganzzahlige Nullstellen besitzen.

Ist $x = r$ eine der 3 ganzzahligen Nullstellen von $f(x)$, so setzen wir $x = \bar{x} + r$ und erhalten $f(x) = f(\bar{x} + r) = \bar{f}(\bar{x})$. Die Funktion $\bar{f}(\bar{x})$ besitzt dann ebenfalls die von $f(x)$ verlangte Eigenschaft und $\bar{x} = 0$ ist eine ihrer Nullstellen. Bezeichnen wir die beiden anderen ganzzahligen Nullstellen von $\bar{f}(\bar{x})$ mit a und b, so gilt

$$\bar{f}(\bar{x}) = c_0 \bar{x} (\bar{x} - a) (\bar{x} - b) = c_0 [\bar{x}^3 - (a + b) \bar{x}^2 + ab \bar{x}]$$

und damit

$$\bar{f}'(\bar{x}) = c_0 [3 \bar{x}^2 - 2 (a + b) \bar{x} + ab] .$$

Die beiden Nullstellen von $\bar{f}'(\bar{x})$ lauten nun

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{3} \left(a + b \pm \sqrt{a^2 - a b + b^2}\right) .$$

Wegen $a^2 - a b + b^2 = (a - b/2)^2 + 3 b^2/4 \geqq 0$ sind $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ reell, was auch aus dem Satz von ROLLE entnommen werden kann. $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ können nur ganzzahlig sein, wenn der Radikand $a^2 - a b + b^2$ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl c ist. Wenn dann noch dafür gesorgt wird, dass 3 ein gemeinsamer Teiler von $a + b + c$ und $a + b - c$ ist, sind $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ wirklich ganzzahlig.

Wir haben also zunächst alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 - a b + b^2 = c^2 \tag{1}$$

in ganzen Zahlen a, b, c zu suchen.

Im Sonderfall $c = 0$ folgt $a = 0$, $b = 0$ und damit auch $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$. Sämtliche Nullstellen von $\bar{f}(\bar{x})$ sowie die von $\bar{f}'(\bar{x})$ fallen also in $\bar{x} = 0$ zusammen; man hat hier $\bar{f}(\bar{x}) = c_0 \bar{x}^3$.

Um im Fall $c \neq 0$ alle Lösungen der Gleichung (1) in ganzen Zahlen a, b, c zu finden, schreiben wir

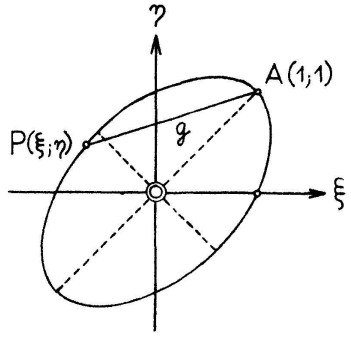
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{und setzen} \quad \frac{a}{c} = \xi , \quad \frac{b}{c} = \eta .$$

Jede Lösung der Gleichung (1) in ganzen Zahlen a, b, c liefert also rationale Zahlen ξ und η, welche der Gleichung

$$\xi^2 - \xi \eta + \eta^2 = 1 \tag{2}$$

genügen. Hat man andererseits eine Lösung der Gleichung (2) in rationalen Zahlen ξ und η, so kann man ξ und η auf gemeinsamen Nenner bringen und beide Seiten von

(2) mit dem Quadrat dieses Nenners multiplizieren. Man besitzt dann eine Lösung von (1) in ganzen Zahlen. Durch (2) ist in einem rechtwinkligen kartesischen (ξ, η)-Koordinatensystem eine Ellipse gegeben, die durch den Punkt $A(1;1)$ verläuft (vgl. Figur). Ist $P(\xi;\eta)$ ein von $A(1;1)$ verschiedener Ellipsenpunkt mit rationalen



Koordinaten ξ, η, so hat die durch $A(1;1)$ und $P(\xi;\eta)$ verlaufende Gerade g den rationalen Richtungsfaktor

$$\lambda = \frac{\eta - 1}{\xi - 1}.$$

Die folgende Rechnung zeigt nun, dass umgekehrt eine durch $A(1;1)$ verlaufende Gerade g mit rationalem Richtungsfaktor λ die Ellipse ausser in $A(1;1)$ stets in einem weiteren Punkt $P(\xi;\eta)$ trifft, der rationale Koordinaten ξ, η hat[1]). Setzen wir nämlich $\eta = \lambda(\xi - 1) + 1$ in (2) ein, so ergibt sich die Gleichung

$$(\xi - 1)\,[\xi\,(\lambda^2 - \lambda + 1) - \lambda^2 + 2\lambda] = 0.$$

Die hier interessierende Lösung lautet

$$\xi = \frac{\lambda^2 - 2\lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1};$$

damit wird

$$\eta = \frac{1 - 2\lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1}.$$

Hierin besitzen wir eine Parameterdarstellung sämtlicher Lösungen von (2) in rationalen Zahlen ξ und η. Die Lösung $\xi = 1$, $\eta = 1$ erhält man für $\lambda = -1$. Für $\lambda \to \infty$ gilt $\xi \to 1$ und $\eta \to 0$. Wir schreiben nun $\lambda = u/v$ und dürfen dabei die ganzen Zahlen u und v als zueinander teilerfremd auffassen. Wir erhalten

$$\xi = \frac{a}{c} = \frac{u^2 - 2uv}{u^2 - uv + v^2}, \qquad \eta = \frac{b}{c} = \frac{v^2 - 2uv}{u^2 - uv + v^2}.$$

Mit einem Proportionalitätsfaktor t ergeben sich die Darstellungen

$$a = t\,(u^2 - 2uv), \quad b = t\,(v^2 - 2uv), \quad c = t\,(u^2 - uv + v^2), \tag{3}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{t}{3}(2u^2 + 2v^2 - 5uv) = \frac{2t}{3}(u^2 - uv + v^2) - tuv,$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(a + b - c) = -tuv.$$

[1]) Diese Methode zur Bestimmung der rationalen Punkte auf einem Kegelschnitt ist wohlbekannt. Man findet die allgemeine Lösung zum Beispiel in DICKSON-BODEWIG: Einführung in die Zahlentheorie, B. G. Teubner, Leipzig 1931, S. 40.

Hätten zum Beispiel $u^2 - 2uv$, $v^2 - 2uv$ und uv einen gemeinsamen Teiler $d > 1$, so könnte man mit ganzen Zahlen k_1, k_2, k_3 schreiben

$$u^2 - 2uv = d\,k_1\,, \quad v^2 - 2uv = d\,k_2\,, \quad uv = d\,k_3$$

und erhielte

$$u^2 = d\,(k_1 + 2k_3)\,, \quad v^2 = d\,(k_2 + 2k_3)\,.$$

u^2 und v^2 hätten also $d > 1$ als gemeinsamen Teiler; dies ist aber unmöglich, weil wegen $(u, v) = 1$ auch $(u^2, v^2) = 1$ sein muss. Der Proportionalitätsfaktor t darf also nur ganzzahlig gewählt werden.

Wir untersuchen jetzt, für welche Werte von u und v der symmetrische Ausdruck $u^2 - uv + v^2$ durch 3 teilbar ist. Hierzu beachten wir, dass beim Paar (u, v) folgende 5 Kombinationen von Resten modulo 3 möglich sind: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$. In den ersten 4 Fällen ist $u^2 - uv + v^2 \equiv 1 \pmod 3$. Daher ist in diesen Fällen $\bar{x}_1$ nur ganzzahlig, wenn t ein Vielfaches von 3 ist. In den Darstellungen (3) haben wir dann t durch $3t$ zu ersetzen, wobei t nach wie vor eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll. Bei der letzten Restekombination $(1, -1)$ ist $u^2 - uv + v^2 \equiv 0 \pmod 3$. In diesem Fall liefern also die Darstellungen (3) bereits lauter ganzzahlige Werte. Zusammengefasst können wir demnach schreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 3^s\,t\,(u^2 - 2uv)\,, \\ b &= 3^s\,t\,(v^2 - 2uv)\,, \\ c &= 3^s\,t\,(u^2 - uv + v^2)\,, \\ \bar{x}_1 &= 2 \cdot 3^{s-1}\,t\,(u^2 - uv + v^2) - 3^s\,t\,uv\,, \\ \bar{x}_2 &= -3^s\,t\,uv\,. \end{aligned}} \tag{4}$$

Hierin bedeuten t, u und v beliebige ganze Zahlen mit $(u, v) = 1$. Für $uv \equiv -1 \pmod 3$ ist $s = 0$ zu setzen, während $s = 1$ zu nehmen ist, falls $uv \equiv 0 \pmod 3$ oder $uv \equiv 1 \pmod 3$. Der früher genannte Sonderfall $c = 0$ wird durch (4) ebenfalls erfasst; man braucht dazu nur $t = 0$ zu setzen.

Die Funktion $f(x)$ besitzt die Nullstellen

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= r\,, \\ a_2 &= a + r\,, \\ a_3 &= b + r\,. \end{aligned}} \tag{5}$$

Hierin bedeutet r eine beliebige ganze Zahl, während für a und b die durch (4) gegebenen Ausdrücke einzusetzen sind. Diese durch (5) gegebene Form der Nullstellen von $f(x)$ ist notwendig und hinreichend dafür, dass auch $f'(x)$ ganzzahlige Nullstellen hat. Diese lauten dann $x_1 = \bar{x}_1 + r$ und $x_2 = \bar{x}_2 + r$.

Die eingangs gestellte Aufgabe ändern wir nun dahin gehend ab, dass wir den Ausdruck «ganzzahlige Nullstellen» durch «rationale Nullstellen» ersetzen. Mit Hilfe der

bisherigen Ergebnisse können wir auch die Lösung dieser abgeänderten Aufgabe angeben. Haben nämlich die 3 rationalen Nullstellen von $f(x)$ und die 2 rationalen Nullstellen von $f'(x)$ den Hauptnenner n, so setzen wir $x = \tilde{x}/n$ und erhalten $f(x) = f(\tilde{x}/n) = \tilde{f}(\tilde{x})$. Die Funktionen $\tilde{f}(\tilde{x})$ und $\tilde{f}'(\tilde{x})$ besitzen dann lauter ganzzahlige Nullstellen. Für die Nullstellen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ gelten damit die in (5) gegebenen Darstellungen. Wegen $x = \tilde{x}/n$ erhält man die Nullstellen von $f(x)$ aus denen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ durch Division mit der natürlichen Zahl n.

KARL ZUSER, Ingolstadt

Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit p eine Primzahl, mit $:=$ Gleichheit nach Definition, mit $\wedge$ das «und» der Logik, mit $A\,\{* : \ldots\}$ die Anzahl der * mit den Eigenschaften ... und mit C eine absolute positive Konstante.

Wir gehen aus von zwei geläufigen Ergebnissen der elementaren additiven Primzahltheorie. SCHNIRELMANN[1]) hat bewiesen, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p_1 + p_2$ ($p_{1,2}$ prim) positive asymptotische Dichte hat; PRACHAR[2]) hat gezeigt, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p^+ - p$, wenn p^+ die der Primzahl p folgende Primzahl bezeichnet, positive asymptotische Dichte hat. Wir nehmen beide Fragestellungen zusammen und beweisen einen verwandten Satz für Zahlenpaare in der Ebene:

Satz 1. *Es gibt positive Konstanten C_1, C_2, C_3 derart, dass aus $x > C_1$ folgt*

$$A\,\{m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge m = p_1 + p_2 \wedge n = p_2^+ - p_2 \wedge p_{1,2}\,\text{prim}\} > C_3\, x \log x\,. \tag{1}$$

Beweis. Mit

$$f(m, n) := A\,\{p_1, p_2 : p_1 + p_2 = m \wedge p_2^+ - p_2 = n\}$$

kann man für (1) auch

$$B(x) := A\,\{m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge f(m, n) > 0\} > C_3\, x \log x \tag{2}$$

schreiben. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Big(\sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} f(m, n)\Big)^2 \leq B(x) \sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} f^2(m, n)\,. \tag{3}$$

Es ist

$$f(m, n) \leq A\,\{p : p < m \wedge (p \wedge m - p \wedge n + p\ \text{prim})\}$$

$$< C_4 \frac{x}{\log^3 x} \prod_{p \mid m\,n\,(m+n)} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big)^2 \qquad (m < x,\ x > 2)$$

nach der Brunschen Siebmethode[3]). Mit

$$P_m := \prod_{p \mid m} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big)^4 \tag{4}$$

[1]) Vgl. etwa [1], 150–153.
[2]) Vgl. etwa [1], 154–155.
[3]) Vgl. [1], II. Satz 4.2 und I. (5.23).