Über die Blockierungszahl einer Kreispackung

Autor(en): **Fejes Tóth, Gábor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23298

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIX Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1964

Über die Blockierungszahl einer Kreispackung

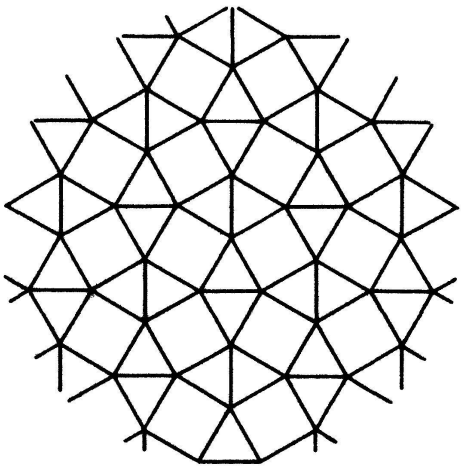
Wegen Parkplatzmangel sind die Bewohner eines Hauses oder Hausblocks manchmal gezwungen, ihre Wagen so zu parken, dass gewisse Wagen durch andere blockiert sind. Dann müssen natürlich die Schlüssel gewisser Wagen etwa beim Hausmeister deponiert werden, damit jeder Besitzer seinen Wagen nach Umstellung der ihn blockierenden Wagen herausholen kann. Mit höchstens wievielfachen Blockierungen haben wir zu rechnen, wenn die Anzahl der Wagen sowie ihre Typen bekannt sind und die Bewegung der Wagen nur durch einander gehindert wird?

Im vorliegenden Aufsatz betrachten wir das analoge Problem für kongruente Kreise oder allgemeiner für gewisse konvexe Scheiben. Ist in der Euklidischen Ebene eine Packung von endlich vielen konvexen Scheiben vorgegeben, so definieren wir die *Blockierungszahl* der Packung durch die kleinste Zahl B mit der Eigenschaft, dass nach höchstens B sukzessiven Bewegungen der Scheiben jede Scheibe durch eine Bewegung in das Äussere des Umkreises der ursprünglichen Scheiben gebracht werden kann. Hier wird eine Bewegung als eine einparametrige, stetige Schar kongruenter Transformationen aufgefasst, bei der die bewegte Scheibe in keiner Lage einen gemeinsamen inneren Punkt mit einer anderen Scheibe haben darf.

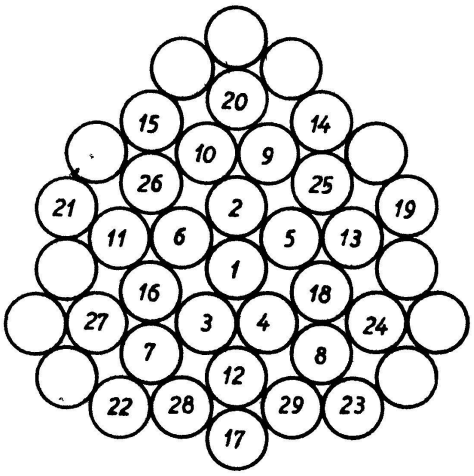
Wir betrachten alle möglichen Packungen von n kongruenten Kreisen. Gesucht wird das Maximum $B(n)$ der zugehörigen Blockierungszahlen. Dieses Problem sowie die weiteren in diesem Aufsatz aufgeworfenen Probleme rühren von L. Fejes Tóth her.

Offensichtlich ist $B(1) = B(2) = B(3) = 0$ und $B(4) = B(5) = 1$. Aber die exakte Bestimmung von $B(n)$ scheint etwa für $n \geq 10$ ein schwieriges Problem zu sein. Wir werden für $n < 30$ durch eine interessante Konstruktion «stark blockierter» Kreislagerungen eine untere Schranke für $B(n)$ angeben.

Wir betrachten das halbreguläre Mosaik (3, 3, 4, 3, 4) mit der Kantenlänge 2 (Figur 1), schlagen um seine Ecken Einheitskreise und numerieren gewisse Kreise in der in Figur 2 dargestellten Weise. Die Kreise 1 bis 4 bilden eine Kreispackung mit der Blockierungszahl 1. Nehmen wir noch die Kreise 5 und 6 hinzu, so entsteht offensichtlich eine Kreislagerung mit der Blockierungszahl 2. Wir zeigen jetzt, dass die Kreise 1 bis 10 eine Packung mit der Blockierungszahl 3 bilden. Um nämlich den Kreis 1 herauszuholen, müssen entweder die Kreise 2 und 6, oder 6 und 3, oder 3 und 4, oder 4 und 5, oder 5 und 2 weggenommen werden. In jedem dieser Paare kommt einer der Kreise 2, 3 und 4 vor. Der Kreis 2 ist aber durch 9 und 10, der Kreis 3 durch 7 und der Kreis 4 durch 8 blockiert. Hieraus folgt, dass zur Befreiung des Kreises 1 die Entfernung eines der folgenden Kreistripel nötig ist: (2, 6, 10), (3, 6, 7), (3, 4, 7), (3, 4, 8), (4, 5, 8), (2, 5, 9).



Figur 1



Figur 2

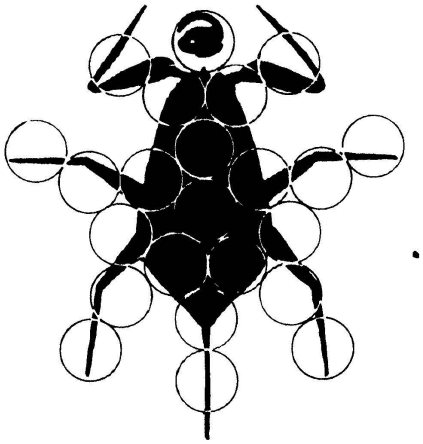
Betrachten wir jetzt die Kreise 1 bis 13, so folgt aus der oben erwähnten Tatsache, dass der Kreis 1 nur durch Fortschaffung eines der folgenden Quadrupel zugänglich wird: (2, 6, 9, 10), (2, 6, 10, 11), (3, 6, 7, 11), (3, 4, 7, 8), (3, 4, 7, 12), (3, 4, 8, 12), (4, 5, 8, 13), (2, 5, 9, 10), (2, 5, 9, 13). Somit haben die Kreise 1 bis 13 die Blockierungszahl 4.

In ähnlicher Weise sieht man ein, dass durch Hinzufügung der Kreise 14 bis 18, 19 bis 23 und 24 bis 29 die Blockierungszahl stets um Eins zunimmt. Der Beweis wird zwar durch die zweiseitige Symmetrie der betreffenden Kreispackungen erleichtert, ist aber wegen der zunehmenden Anzahl der Fallunterscheidungen doch ziemlich mühsam. Wir wollen hier auf einen ausführlichen Beweis verzichten und fassen nur das Resultat in folgender Tabelle zusammen:

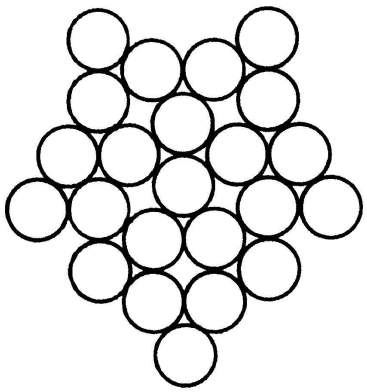
$n \geq 4$	6	10	13	18	23	29
$B(n) \geq 1$	2	3	4	5	6	7.

In unseren Kreispackungen lassen sich die Kreise ohne Veränderung der Blockierungszahl in mannigfaltiger Weise umordnen. Betrachten wir zum Beispiel unsere wasserskorpionförmige Kreispackung aus 23 Kreisen mit der Blockierungszahl 6 (Figur 3). Durch geeignete Umlegung der Kreise 12, 17, 19, 20, 21, 22, 23 entsteht eine andere Kreispackung (Figur 4) mit derselben Blockierungszahl 6. Es gelang mir

aber nicht, die angegebenen Blockierungszahlen bei Beibehaltung der Kreiszahlen zu vergrössern.



Figur 3



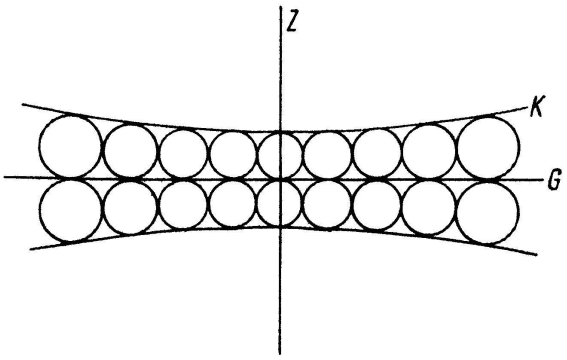
Figur 4

Die naheliegende Vermutung, dass die Grössenordnung von $B(n)$ $\sqrt{n}$ ist, ist auf Grund der Tatsache zu bezweifeln, dass für «fast kongruente» Kreise die entsprechende Grössenordnung wenigstens $n/4$ beträgt: *Ist ein beliebiges Intervall vorgegeben, so gibt es n Kreise, deren Radien in diesem Intervall liegen und die eine Packung mit der Blockierungszahl* $[(n-2)/4]$ *bilden.*

Es sei (a, b) das vorgegebene Intervall, K ein Kreis, G eine Gerade, die von K den Abstand $2a$ hat, und k_0 der Kreis vom Radius $r_0 = a$, der sowohl K wie G berührt. Wir betrachten die K und G berührenden weiteren Kreise $k_1, \ldots, k_m$, so dass in der Kette $k_0, k_1, \ldots, k_m$ je zwei aufeinander folgende Kreise auch einander berühren. Es sei $m > 1$ beliebig vorgegeben. Ist der Kreis K genügend gross, so gilt für die Radien $r_0, r_1, \ldots, r_m$ der Kreise $k_0, k_1, \ldots, k_m$

$$r_0 < r_1 < \cdots < r_m < b\,.$$

Wir nehmen jetzt zu den Kreisen $k_0, \ldots, k_m$ ihre Spiegelbilder $k_0', \ldots, k_m'$ bezüglich G, weiterhin die Spiegelbilder von $k_1, \ldots, k_m$ und $k_1', \ldots, k_m'$ bezüglich der Zentralen Z von k_0 und k_0' hinzu (Figur 5). Wir erhalten insgesamt $4m + 2$ Kreise, die eine Packung mit der Blockierungszahl m bilden. Zur Befreiung des Kreises k_0 muss man nämlich entweder die Kreise $k_1, \ldots, k_m$ oder ihre Spiegelbilder bezüglich Z oder mehr als m Kreise wegnehmen.

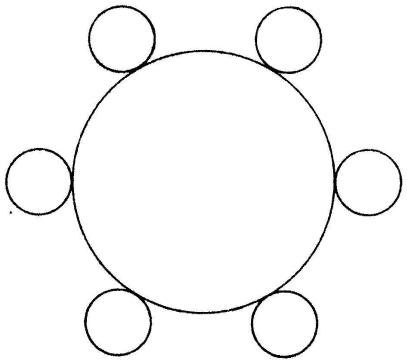


Figur 5

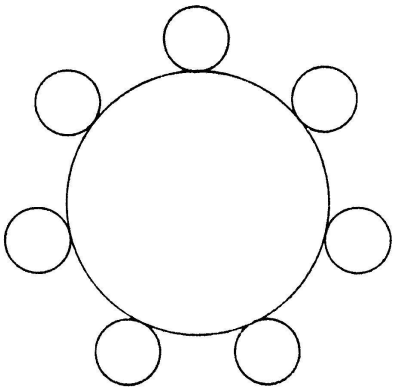
Bei diesem Beispiel kann man statt K eine andere geeignete Kurve betrachten. Das Wesentliche ist nur, dass $r_0, r_1, \ldots, r_m$ eine konvexe Folge bilden.

Wir zeigen jetzt, dass *die grösstmögliche Blockierungszahl, die in einer Packung von n konvexen Scheiben auftreten kann,* $[(n-2)/2]$ *beträgt.*

Wir betrachten einen «grossen» Kreis K und $n-1$ Einheitskreise, die K in den Ecken eines regulären $(n-1)$-Ecks berühren (Figur 6). Wir haben eine aus n Kreisen bestehende Kreispackung mit der Blockierungszahl $[(n-2)/2]$ vor uns. Wir haben noch zu zeigen, dass die Blockierungszahl einer beliebigen Packung von n konvexen Scheiben höchstens $[(n-2)/2]$ ist.



Figur 6a



Figur 6b

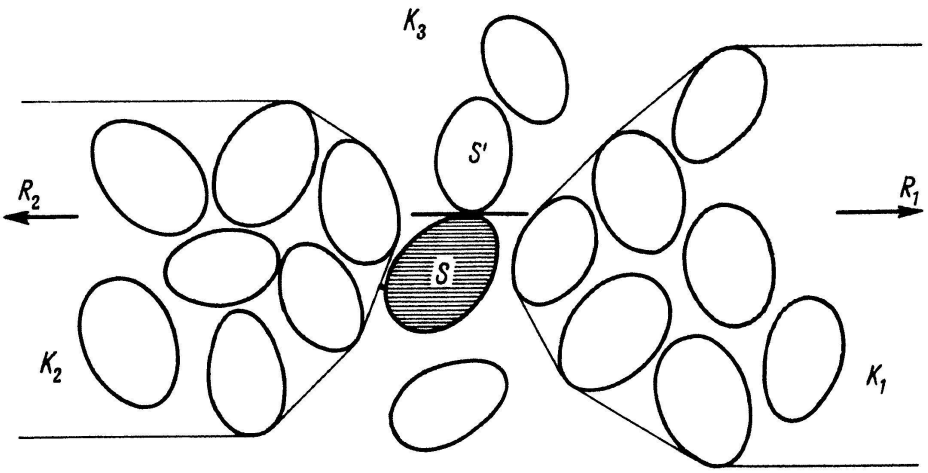
Wir fassen eine beliebige Scheibe S ins Auge und wählen eine einstweilen beliebige Richtung R_1. Die entgegengesetzte Richtung sei R_2. Wir verschieben S in der Richtung R_1. Wird dabei die Bewegung von S durch eine andere Scheibe gehindert, so wird diese mit S mitverschoben. Wir setzen dieses Verfahren so fort, dass auch jede verschobene Scheibe die ihr im Wege stehenden Scheiben vor sich her schiebt. Wiederholen wir dieses Verfahren in der Richtung R_2, so können wir die von S verschiedenen Scheiben in drei Klassen K_1, K_2 und K_3 einteilen, je nachdem sie bei der Verschiebung von S in der Richtung R_1 oder in der Richtung R_2 in Bewegung kommen oder in beiden Fällen in Ruhe bleiben. Es ist dabei zu bemerken, dass eine Scheibe nicht zu beiden Klassen K_1 und K_2 gehören kann. In diesem Falle gäbe es nämlich in der Packung einen Scheibenzyklus, in dem die Verschiebung jeder Scheibe in der Richtung R_1 durch die nächste gehindert würde, was unmöglich ist[1]).

Wir behaupten, dass die Richtung R_1 so gewählt werden kann, dass K_3 wenigstens eine Scheibe enthält. Wir können voraussetzen, dass S einen gemeinsamen Randpunkt mit einer anderen Scheibe S' hat, da sonst S durch eine S enthaltende konvexe Scheibe mit dieser Eigenschaft ersetzt werden könnte. Ist R_1 parallel zu einer gemeinsamen Stützgeraden von S und S', so gehört S' zu K_3 (Figur 7). Im entgegengesetzten Fall gebe es nämlich wiederum einen unzulässigen Zyklus vom obigen Typus (der entweder S oder S' enthält).

Da nun die Anzahl der in K_1 und K_2 enthaltenen Scheiben insgesamt höchstens $n-2$ ist, enthält eine dieser Klassen, sagen wir K_1, höchstens $[(n-2)/2]$ Scheiben. Möglicherweise wird die Verschiebung dieser Scheiben in der Richtung R_1 durch einander, aber nicht durch andere Scheiben der Packung gehindert. Wegen der Unmöglichkeit eines Zyklus folgt hieraus, dass sich diese Scheiben sukzessiv in der Rich-

[1]) Vgl. L. FEJES TÓTH und A. HEPPES, *Über stabile Körpersysteme.* Compositio Math. *15*, 119–126 (1963).

tung R_1 verschieben lassen[2]), wodurch sich auch S in dieser Richtung verschieben lässt.



Figur 7

Ist eine Scheibenpackung vorgegeben, so liegt die Definition der Blockierungszahl einer Scheibe auf der Hand. Die oben definierte Blockierungszahl der Packung ist dann die Blockierungszahl der am stärksten blockierten Scheibe. Neue Probleme entstehen, wenn wir statt dieser «oberen Blockierungszahl» die «mittlere Blockierungszahl» betrachten, das heisst das arithmetische Mittel der Blockierungszahlen der einzelnen Scheiben. Weitere Fragen erheben sich in Verbindung mit der «Schlüsselzahl» einer Packung. Man kann in einer Packung gewisse Scheiben so angeben, dass sie sich sukzessiv entfernen lassen und dass nach ihrer Entfernung auch alle übrigen Scheiben zugänglich werden. Die Schlüsselzahl ist die kleinstmöglichste Anzahl solcher Scheiben. Es handelt sich um die kleinstmögliche Anzahl der zu deponierenden Autoschlüssel.

GÁBOR FEJES TÓTH, Budapest

Euklidische und pseudoeuklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel

Die Metrik der euklidischen Ebene stützt sich bekanntlich auf ein konjugiert komplexes Fernpunktepaar (I_1, I_2). Ersetzt man dieses durch ein reell getrenntes Fernpunktepaar (I_1^*, I_2^*), so gehen gewisse Sätze der reellen euklidischen Geometrie in analoge Sätze der reellen pseudoeuklidischen Geometrie über; durch geeignete euklidische Deutung können hieraus neue Sätze der euklidischen Geometrie gewonnen werden. Geht man beispielsweise aus vom euklidischen Höhenschnittpunktsatz:

1. *Die drei Höhen eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich in einem Punkt Q,*

so sind zunächst die im euklidischen Sinn senkrechten Geradenpaare – das sind jene, die in bezug auf das (als zerfallende Kurve 2. Klasse aufgefasste) absolute Punktepaar (I_1, I_2) konjugiert sind – durch Geradenpaare zu ersetzen, die in bezug auf (I_1^*, I_2^*)

[2]) Die Tatsache, dass sich in einer Packung endlich vieler konvexer Scheiben eine Scheibe in einer beliebig vorgegebenen Richtung verschieben lässt, ist nicht trivial. Im dreidimensionalen Raum gilt die analoge Behauptung nicht mehr. Siehe den in Fussnote 1 zitierten Aufsatz.