Ein Schliessungssatz für zwei Kreise

Autor(en): **Bottema, O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23920

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

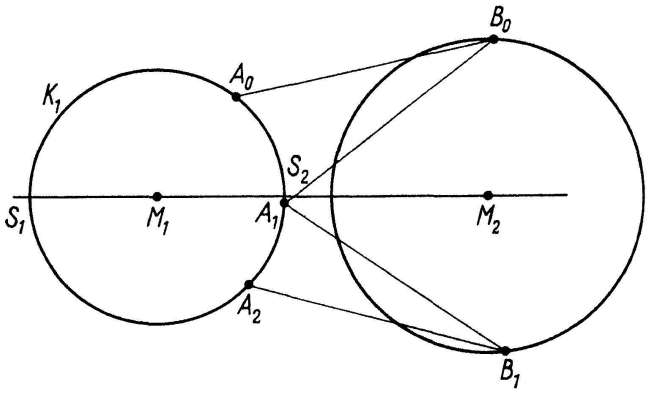
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XX Heft 1 Seiten 1–24 Basel, 10. Januar 1965

Ein Schliessungssatz für zwei Kreise

1. Wir betrachten die Figur zweier Kreise K_1 und K_2, mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien R_1, R_2. Der Abstand $M_1 M_2$ ist d. Weiter ist noch eine Strecke k gegeben.

Wir wählen auf K_1 einen beliebigen Punkt A_0 und bestimmen auf K_2 einen der beiden Punkte B_0 mit $A_0 B_0 = k$.



Figur 1

Dann konstruieren wir auf K_1 den von A_0 verschiedenen Punkt A_1 mit $B_0 A_1 = k$. Auf K_2 bestimmen wir den von B_0 verschiedenen Punkt B_1 mit $A_1 B_1 = k$, usw. (Figur 1).

Auf K_1 erscheint die Punktreihe $A_0 A_1 A_2 \ldots$, auf K_2 die Punktreihe $B_0 B_1 B_2 \ldots$. Wir wollen diese Reihen betrachten und dabei vor allem die Frage stellen, ob A_n ($n > 1$) mit A_0 (und dann auch B_n mit B_0) zusammenfallen kann.

Wenn wir uns auf reelle Figuren beschränken wollen, so müssen zwischen R_1, R_2, d und k gewisse Ungleichungen bestehen. Es genügt dabei offenbar, dass für beliebige A_0 der Kreis (A_0, k) mit K_2 zwei reelle (und wir wollen voraussetzen: verschiedene) Schnittpunkte hat. Sind S_1 und S_2 die Schnittpunkte von K_1 mit der Geraden $M_1 M_2$ (Figur 1), dann hat man $S_1 M_2 = R_1 + d$, $S_2 M_2 = -R_1 + d$, und wir haben daher die Ungleichungen

$$|R_2 - k| < R_1 + d < R_2 + k \quad \text{und} \quad |R_2 - k| < |R_1 - d| < R_2 + k\,,$$

die bekanntlich zwei wesentlich verschiedene Lösungen haben. Es muss entweder d oder R_1 die kleinste der vier bezüglichen Strecken sein; die Grössenordnung der übrigen ist beliebig, aber es soll zudem die Summe der kleinsten und der grössten Strecke kleiner als die Summe der anderen sein. Das ist der Inhalt der sogenannten Grashofschen Regel der Getriebelehre.

Im ersten Fall folgt nicht nur aus einem beliebigen Punkt A_0 ein reeller Punkt B_0, sondern auch umgekehrt gibt es zu einem beliebig auf K_2 gewählten Punkt B einen reellen Punkt A auf K_1 mit $BA = k$. In diesem, sagen wir, symmetrischen Fall könnte man die Kreise K_1 und K_2 vertauschen. Im zweiten, unsymmetrischen Fall dagegen trifft das nicht zu. Der Ort der mittels der Kreise (A_0, k) auf K_2 konstruierten Punkte B ist nicht K_2 selbst; er besteht aus zwei Kreisbogen von K_2. Oder in der Sprache der Getriebelehre: im ersten Fall ist das Getriebe $M_1 M_2 B A$ eine Doppelkurbel, im zweiten Fall eine Kurbelschwinge.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -R_1 + R_2 + d + k\,, & p_2 &= R_1 - R_2 + d + k\,,\\ p_3 &= R_1 + R_2 - d + k\,, & p_4 &= R_1 + R_2 + d - k\,;\\ q_1 &= R_1 - R_2 - d + k\,, & q_2 &= -R_1 + R_2 - d + k\,,\\ q_3 &= -R_1 - R_2 + d + k\,, & q_4 &= R_1 + R_2 + d + k\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Offenbar haben wir

$$p_1 > 0\,, \quad p_2 > 0\,, \quad p_3 > 0\,, \quad p_4 > 0\,, \quad q_4 > 0\,.$$

Weiter hat man im symmetrischen Fall:

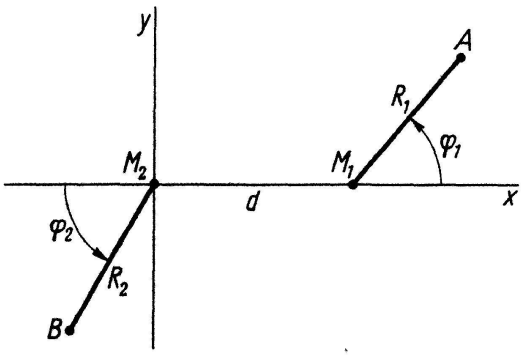
$$q_1 > 0\,, \quad q_2 > 0\,, \quad q_3 < 0 \tag{2}$$

und im unsymmetrischen Fall:

$$q_1 < 0\,, \quad q_2 > 0\,, \quad q_3 > 0\,. \tag{3}$$

Wir bestimmen erst allgemein analytisch den Zusammenhang zwischen A_i und B_i.

2. Wir wählen die X-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems entlang $M_2 M_1$; es sei $M_2 = (0, 0)$, $M_1 = (d, 0)$. Die Punkte A von K_1 und die Punkte B von K_2 werden bestimmt durch die Winkel φ_1 und φ_2 (Figur 2). Dann ist



Figur 2

$$x_A = d + R_1 \cos\varphi_1\,, \quad y_A = R_1 \sin\varphi_1\,, \quad x_B = -R_2 \cos\varphi_2\,, \quad y_B = -R_2 \sin\varphi_2\,, \tag{4}$$

und die Gleichung, welche aussagt, dass der Abstand $A\,B$ gleich k ist, lautet

$$\{d + (R_1 \cos\varphi_1 + R_2 \cos\varphi_2)\}^2 + (R_1 \sin\varphi_1 + R_2 \sin\varphi_2)^2 = k^2\,, \tag{5}$$

oder mit

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2} = u\,, \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2} = v:$$

$$(R_1^2 + R_2^2 + d^2 - k^2)\,(1 + u^2)\,(1 + v^2) + 2\,R_1\,d\,(1 - u^2)\,(1 + v^2)$$
$$+ 2\,R_2\,d\,(1 + u^2)\,(1 - v^2) + 2\,R_1\,R_2\,\{(1 - u^2)\,(1 - v^2) + 4\,u\,v\} = 0\,.$$

Das heisst

$$p_3\,q_3\,u^2\,v^2 + p_1\,q_1\,u^2 + p_2\,q_2\,v^2 - p_4\,q_4 - 8\,R_1\,R_2\,u\,v = 0 \tag{6}$$

ist die Gleichung für die (2, 2)-Verwandtschaft zwischen den Punkten $A(u)$ auf K_1 und $B(v)$ auf K_2.

Wenn $A(u)$ gegeben ist, so folgen die zugeordneten Punkte $B(v)$ aus der quadratischen Gleichung

$$(p_3\,q_3\,u^2 + p_2\,q_2)\,v^2 - 8\,R_1\,R_2\,u\,v + (p_1\,q_1\,u^2 - p_4\,q_4) = 0 \tag{7}$$

mit der Diskriminante

$$D = -p_1\,q_1\,p_3\,q_3\,u^4 + (16\,R_1^2\,R_2^2 - p_1\,q_1\,p_2\,q_2 + p_3\,q_3\,p_4\,q_4)\,u^2 + p_2\,q_2\,p_4\,q_4\,. \tag{8}$$

Für die Nullstellen von D findet man $u^2 = -q_2\,q_4/p_1\,p_3$ und $u^2 = p_2\,p_4/q_1\,q_3$, welche Zahlen wegen (2) und (3) negativ sind. Überdies ist der Koeffizient von u^4 positiv; D ist somit positiv-definit, und das bestätigt, dass zu einem beliebigen Punkt A_0 ein reeller Punkt B_0 gehört.

Umgekehrt folgt aus einem Punkt $B(v)$ ein Punkt $A(u)$ mittels der Gleichung

$$(p_3\,q_3\,v^2 + p_1\,q_1)\,u^2 - 8\,R_1\,R_2\,u\,v + (p_2\,q_2\,v^2 - p_4\,q_4) = 0 \tag{9}$$

mit der Diskriminante

$$D' = -p_2\,q_2\,p_3\,q_3\,v^4 + (16\,R_1^2\,R_2^2 - p_1\,q_1\,p_2\,q_2 + p_3\,q_3\,p_4\,q_4)\,v^2 + p_1\,q_1\,p_4\,q_4\,. \tag{10}$$

Diese hat die Nullstellen $v^2 = -q_1\,q_4/p_2\,p_3$ und $v^2 = p_1\,p_4/q_2\,q_3$. Im symmetrischen Fall sind diese Zahlen wieder negativ, und D' ist positiv-definit, das heisst zu jedem Punkt B gehört ein reeller Punkt A. Im unsymmetrischen Fall sind sie aber positiv, und D' hat Zeichenwechsel; die Punkte B, die zu reellen A gehören, liegen auf zwei Kreisbogen von K_2.

3. Aus (6) können wir nun auch die Relation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten der Folge $A(u)$ ableiten. Nennen wir ihre Parameter kurz u_1 und u_2, dann müssen die zwei quadratischen Gleichungen (7):

$$(p_3\,q_3\,u_i^2 + p_2\,q_2)\,v^2 - 8\,R_1\,R_2\,u_i\,v + (p_1\,q_1\,u_i^2 - p_4\,q_4) = 0\,, \quad i = 1, 2 \tag{11}$$

eine gemeinsame Wurzel haben, da zu $A(u_1)$ und $A(u_2)$ derselbe Punkt B gehört. Die Bedingung dafür lautet

$$64\,R_1^2\,R_2^2\,(p_3\,q_3\,u_1\,u_2 - p_2\,q_2)\,(p_1\,q_1\,u_1\,u_2 + p_4\,q_4)$$
$$+ (p_3\,q_3\,p_4\,q_4 + p_1\,q_1\,p_2\,q_2)^2\,(u_1 + u_2)^2 = 0$$

oder, wenn man noch den letzten Koeffizienten ausrechnet,

$$(p_3 q_3 u_1 u_2 - p_2 q_2)(p_1 q_1 u_1 u_2 + p_4 q_4) + (-R_1^2 - R_2^2 + d^2 + k^2)^2 (u_1 + u_2)^2 = 0\,, \tag{12}$$

und wir erhalten, wie zu erwarten war, eine biquadratische Gleichung zwischen u_1 und u_2.

Die Punkte $A(u_1)$ und $A(u_2)$ haben die homogenen Koordinaten

$$x = d + R_1 + (d - R_1)\, u_i^2\,, \quad y = 2\, R_1\, u_i\,, \quad z = 1 + u_i^2\,,$$

und ihre Verbindungsgerade hat daher die Gleichung

$$(1 - u_1 u_2)\, x + (u_1 + u_2)\, y + \{-(d + R_1) + (d - R_1)\, u_1 u_2\}\, z = 0\,. \tag{13}$$

Wenn wir eine Gerade durch

$$U x + V y + W z = 0$$

darstellen, so gilt für (13):

$$U : V : W = (1 - u_1 u_2) : (u_1 + u_2) : \{-(d + R_1) + (d - R_1)\, u_1 u_2\}\,,$$

und es folgt daraus

$$u_1 u_2 = \frac{(d + R_1)\, U + W}{(d - R_1)\, U + W}\,, \quad u_1 + u_2 = \frac{-2\, R_1\, V}{(d - R_1)\, U + W}\,. \tag{14}$$

Wir substituieren (14) in (12) und finden so eine Gleichung für die Linienkoordinaten der Geraden $A(u_1)$, $A(u_2)$. Schreiben wir noch

$$2f = -R_1^2 - R_2^2 + d^2 + k^2\,, \tag{15}$$

dann wird

$$f^2 U^2 + 2 f d\, U W + (d^2 - R_2^2)\, W^2 + f^2 V^2 = 0 \tag{16}$$

oder

$$(f U + d W)^2 + f^2 V^2 - R_2^2 W^2 = 0\,. \tag{17}$$

Es zeigt sich also, dass die Geraden $A_i A_{i+1}$ Tangenten eines Kegelschnittes C sind, dessen Klassengleichung (17) ist. Der Streckenzug $A_0 A_1 \ldots$ ist somit K_1 eingeschrieben und C umschrieben, das heisst, er ist ein Ponceletscher Streckenzug.

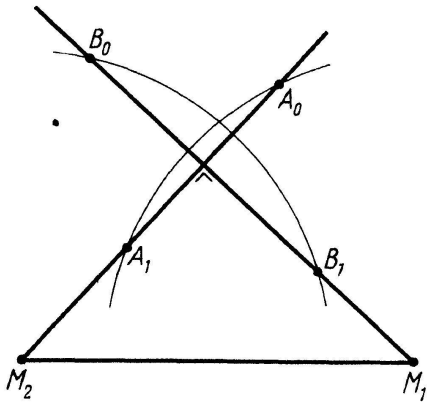
Aus einem klassischen Satz folgt deshalb: *wenn für einen bestimmtent Punkt A_0 von K_1 das Polygon sich nach n Zügen schliesst, so schliesst es sich nach n Zügen für jeden Punkt A_0.*

4. Wir betrachten den Kegelschnitt C noch etwas näher. Da in (17) die drei Koeffizienten niemals alle dasselbe Zeichen haben, ist C immer reell.

Aus (16) lesen wir ab, dass die Diskriminante von C gleich $-R_2^2 f^4$ ist.

C zerfällt also nur dann, wenn $f = 0$ ist. Diese Bedingung hat bekanntlich eine einfache geometrische Bedeutung: sie drückt aus, dass im Viereck $M_1 M_2 B A$ die Diagonalen $M_1 B$ und $M_2 A$ aufeinander senkrecht stehen. Aus (16) folgt, dass C jetzt (für $d^2 \neq R_2^2$) die Gleichung $W^2 = 0$ hat und also aus der Geraden durch M_2 besteht. In diesem Fall fällt immer A_2 mit A_0 zusammen. Das lässt sich natürlich auch unmittelbar geometrisch zeigen (Figur 3). Wenn nicht nur $f = 0$, sondern auch $d^2 = R_2^2$ ist, so ist C unbestimmt. Man hat dann $d = R_2$, $k = R_1$; die Konstruktion versagt, weil jetzt einem Punkt A_0 immer der Punkt M_1 von K_2 zugeordnet ist. Wir setzten

nun weiterhin $f \neq 0$ voraus; C ist nicht entartet. Fragen wir jetzt nach den Tangenten an C durch M_2, dann müssen wir in (16) $W = 0$ substituieren; das Resultat ist $U^2 + V^2 = 0$, wodurch die isotropen Geraden durch M_2 dargestellt werden. Wir finden also: der Punkt M_2 ist ein Brennpunkt von C.



Figur 3

Die Gerade $U = V = 0$ ist Tangente von C, wenn $d = R_2$ ist. Das heisst: C ist eine Parabel, falls K_2 durch M_1 geht.

Man zeigt leicht, dass C eine Ellipse ist für $d < R_2$ und eine Hyperbel für $d > R_2$.

Für den Mittelpunkt N von C findet man

$$x = \xi = \frac{f\,d}{d^2 - R_2^2}, \qquad y = 0\,. \tag{18}$$

Verschiebt man den Ursprung des Koordinatensystems von M_2 nach N und bezeichnet die neuen Koordinaten mit x_1, y_1, U_1, V_1, W_1, dann erhält C die Tangentengleichung

$$-R_2^2 f^2\, U_1^2 + (d^2 - R_2^2)\, f^2\, V_1^2 + (d^2 - R_2^2)^2\, W_1^2 = 0\,, \tag{19}$$

und seine Gleichung in Punktkoordinaten ist somit

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\,, \tag{20}$$

wobei

$$a^2 = \frac{R_2^2 f^2}{(R_2^2 - d^2)^2}, \qquad b^2 = \frac{f^2}{R_2^2 - d^2}\,. \tag{21}$$

Mit diesen Daten ist C wohl genügend beschrieben. Die Relation $a^2 - b^2 = \xi^2$ bestätigt, dass M_2 ein Brennpunkt ist. Für $d \neq 0$ ist C niemals ein Kreis. Die zu M_2 gehörige Brennlinie von C hat die einfache Gleichung $x = f/d$.

5. Bei unseren Betrachtungen über den Kegelschnitt C wurden die anfangs genannten Realitätskriterien ausser acht gelassen. Es ist klar, dass zu einem beliebigen Punkt A_0 nur dann ein reeller Punkt A_1 gehört, wenn jeder Punkt von K_1 ausserhalb C liegt. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: entweder wird C durch K_1 umschlossen, oder C und K_1 liegen ausserhalb einander. Man kann nun leicht analytisch nachprüfen, dass diese zwei Konfigurationen bzw. den symmetrischen und den unsymmetrischen Fall darstellen. Im ersten Fall ist C immer eine Ellipse, im zweiten Fall entweder eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel. In beiden Fällen kann f positiv, Null oder negativ sein.

6. Die Bedingung für ein Ponceletsches Polygon, sich nach n Zügen zu schliessen, kann bekanntlich durch eine Gleichung in den Invarianten der beiden Kegelschnitte ausgedrückt werden. Der Fall $n = 2$ wurde oben besprochen und führt zu $f = 0$. Wir betrachten hier noch den Fall $n = 3$.

Sind die Invarianten des Kegelschnittpaares K_1 und C aufeinanderfolgend Δ_1, θ_1, θ_2, Δ_2, dann lautet die Bedingung:

$$\theta_2^2 = 4\,\Delta_2\,\theta_1\,. \tag{22}$$

Wählen wir das Koordinatensystem $N\,X_1\,Y_1$, dann sind die Gleichungen von K_1 und C:

$$x_1^2 + 2\,(\xi - d)\,x_1\,z_1 + y_1^2 + \{(\xi - d)^2 - R_1^2\}\,z_1^2 = 0\,, \qquad b^2\,x_1^2 + a^2\,y_1^2 - a^2\,b^2\,z_1^2 = 0\,,$$

und man findet

$$\theta_1 = b^2\,(\xi - d)^2 - b^2\,R_1^2 - a^2\,R_1^2 - a^2\,b^2\,,$$

$$\theta_2 = a^2\,b^2\,\{(\xi - d)^2 - R_1^2\} - a^4\,b^2 - a^2\,b^4\,, \qquad \Delta_2 = -a^4\,b^4\,.$$

Die Bedingung (22) gibt nun mittels (18) und (21):

$$2f\,(d^2 \pm R_1\,R_2) - (d^2 - R_1^2)\,(d^2 - R_2^2) = 0\,. \tag{23}$$

Für gegebene R_1, R_2 und d folgen aus (23) zwei Werte für k, wobei der Streckenzug sich nach drei Zügen schliesst.

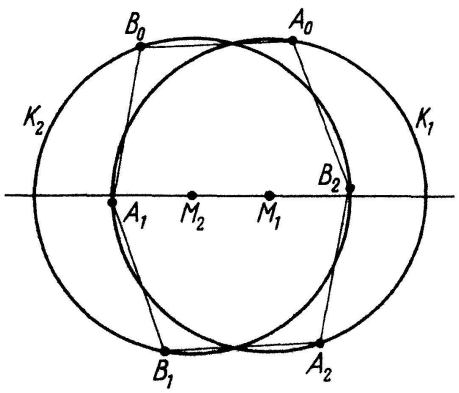
An einem Beispiel zeigen wir, dass die Konfiguration reell möglich ist. Sei

$$R_1 = R_2 = R\,, \qquad d < R\,.$$

Dann folgen aus (23) die Werte k_1 und k_2:

$$k_1 = R\,, \qquad k_2^2 = R^2\,\frac{3\,R^2 - d^2}{R^2 + d^2}\,. \tag{24}$$

Mit beiden Werten sind wir im symmetrischen Fall. Für k_1 ist das ohne weiteres klar; wir haben dabei $\xi = d/2$, N ist die Mitte von M_1 und M_2, $a = R/2$ (Figur 4).



Figur 4

Für k_2 finden wir

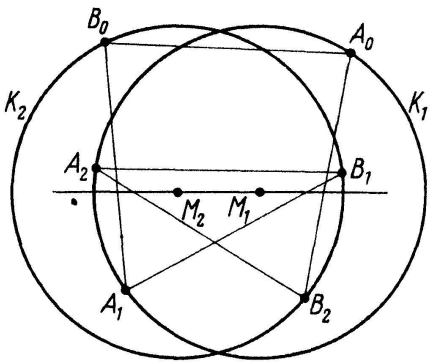
$$k_2^2 - R^2 = \frac{2\,(R^2 - d^2)}{R^2 + d^2} > 0\,,$$

so dass k_2 die grösste der vier Strecken ist. Weiter hat man

$$R^2\,(3\,R^2 - d^2) - (R^2 + d^2)\,(2\,R - d)^2 = -(R - d)^4 < 0$$

und also

$$k_2^2 < (2\,R - d)^2\,, \quad \text{oder} \quad k + d < 2\,R\,.$$



Figur 5

In Figur 5 ist für diesen Fall das Dreieck $A_0\,A_1\,A_2$ konstruiert; es wurde dabei $d = 1$, $R = 2$ und also $k^2 = k_2^2 = 8{,}8$ genommen. O. BOTTEMA, Delft

Kleine Mitteilungen

Über Pseudoprimzahlen

In El. Math. *19*, 36 (1964) hat A. ROTKIEWICZ gezeigt, dass jede Zahl

$$M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} \qquad (n \geqq 4)$$

in bezug auf die natürliche Zahl $a > 1$ pseudoprim ist, das heisst M ist zusammengesetzt und $M \mid a^{M-1} - 1$, also auch $M \mid a^M - a$. Bei der Durchsicht des Beweises von ROTKIEWICZ stellte ich fest, dass die Wahl des relativ grossen Exponenten n^2 bei der Zählerzahl nicht notwendig ist. Vielmehr lässt sich zeigen, dass bereits der Exponent $n + 2$ dafür hinreichend ist, dass M für $n \geqq 2$ bezüglich a pseudoprim ist. Ich beweise hier den folgenden

Satz: Ist $a > 1$ eine natürliche Zahl und

$$A_n = a^{a^n} - 1\,,$$

dann ist

$$M = \frac{A_{n+r}}{A_n}$$

für $n \geqq r \geqq 2$ (n, r ganz) bezüglich a pseudoprim.

Beweis: Die Zahlen A_n haben die Eigenschaften $A_p < A_q$ für $p < q$, $A_p \mid A_q$ und $A_p + 1 \mid A_q + 1$ für $p \leqq q$, und $A_{a^n} + 1 = a^{A_n + 1}$ (p, q, n nicht-negativ, ganz). Daraus folgt zunächst

$$A_n\,(M - 1) = A_{n+r} - A_n = (A_n + 1)\left(\frac{A_{n+r} + 1}{A_n + 1} - 1\right) = (A_n + 1)\,g$$

mit ganzzahligem g, also $A_n + 1 \mid M - 1$, da $(A_n, A_n + 1) = 1$. Nun gilt für $n \geqq r \geqq 2$ sicherlich die Ungleichung $n + r \leqq a^n$, somit $M \mid A_{n+r} \mid A_{a^n} = a^{A_n + 1} - 1 \mid a^{M-1} - 1$, letzteres wegen $A_n + 1 \mid M - 1$. Es ist also $M \mid a^{M-1} - 1$, und M ist auch zusammengesetzt, denn

$$N = \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

hat die Eigenschaften $N \mid M$ und $1 < N < M$, da $r \geqq 2$ ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen