Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 20 (1965)
Heft: 2

Artikel: Zur Selbergschen Gleichung für die arithmetische Progression
Autor: Rieger, G.J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23923

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Selbergschen Gleichung für die arithmetische Progression

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit p eine Primzahl, mit μ bzw. φ die Moebiussche bzw. Eulersche Funktion und mit $:=$ Gleichheit nach Definition. Die Konstante in $O(\,)$ hängt nur von k ab.

Ferner sei $\Lambda(n) := \log p$ für $n = p^a$ und 0 sonst,

$$\psi(x; k, l) := \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} \Lambda(n) \tag{1}$$

und $\psi(x) := \psi(x; 1, 1)$. Alle bisherigen elementaren Beweise des Primzahlsatzes bzw. des Primzahlsatzes für die arithmetische Progression gehen aus von einer Selbergschen Gleichung

$$\psi(x) \log x + \sum_{n < x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \Lambda(n) = 2\, x \log x + O(x) \tag{2}$$

bzw.

$$\psi(x; k, l) \log x + \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} \psi\left(\frac{x}{n}; k, \frac{l}{n}\right) \Lambda(n) = \frac{2\, x}{\varphi(k)} \log x + O(x) \tag{3}$$

für $(k, l) = 1$ oder einer Variante davon[1]). Ein besonders einfacher Beweis von (2) stammt von ISEKI und TATUZAWA[3]); es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, dass sich auch (3) ähnlich kurz beweisen lässt, was hier geschehen soll. Insbesondere werden Charaktere vermieden. Die Methode liefert auch noch neue Beweise für allgemeinere Selbergsche Gleichungen wie etwa für Idealklassen mod$f$[4]) oder Restklassen ganzer Zahlen mod$f$ eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers[5]) ohne neue Schwierigkeit.

Bekanntlich gilt

$$H(x; k, l) := \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv l \bmod k}} 1 = \left[\frac{x - l + k}{k}\right] = \frac{x}{k} + O(1) \tag{4}$$

und

$$H(x; k) := \sum_{\substack{n < x \\ (n, k) = 1}} 1 = \frac{\varphi(k)}{k}\, x + R(x; k)\,, \qquad R(x; k) = O(1)\,. \tag{5}$$

Bekanntlich ist

$$\sum_{m < x} \frac{1}{m} = \log x + C_1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

---

[1]) Vgl. etwa [3][2]).
[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 39.
[3]) Vgl. etwa [4], 66–67.
[4]) Vgl. [1].
[5]) Vgl. [2].

mit einer absoluten Konstanten C_1; aus (5) folgt durch Teilsummation wegen (6) noch

$$\sum_{\substack{m<x \\ (m,k)=1}} \frac{1}{m} = \frac{\varphi(k)}{k}(\log x + C_2) + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7}$$

mit einer nur von k abhängigen Konstanten C_2; aus (4) folgt durch Teilsummation

$$\sum_{\substack{m<x \\ m\equiv l \bmod k}} \log\frac{x}{m} = \frac{x}{k} + O(\log x) \tag{8}$$

und aus (8) wegen $\log(x/m) = \log x - \log m$ und (4) noch

$$\sum_{\substack{m<x \\ m\equiv l \bmod k}} \log m = \frac{x}{k}\log x - \frac{x}{k} + O(\log x)\,. \tag{9}$$

Aus den Definitionen für μ und Λ folgert man bekanntlich unmittelbar

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 \text{ bzw. } 0 \quad \text{für } n = \text{bzw.} > 1\,, \tag{10}$$

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n \tag{11}$$

und daraus mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log\frac{n}{d}\,. \tag{12}$$

Wegen der Definition von Λ ist

$$\sum_{\substack{n<x \\ (n,k)=1}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{\substack{p<x \\ (p,k)=1}} \frac{\log p}{p} + O(1) = \sum_{p<x} \frac{\log p}{p} + O(1)\,. \tag{13}$$

Aus der elementaren Primzahltheorie übernehmen wir die Formeln[6])

$$\sum_{p<x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \tag{14}$$

und

$$\psi(x) = O(x)\,. \tag{15}$$

Im Falle $(n, k) = 1$ ist unter der Restklasse $l/n \bmod k$ wie üblich die durch die Kongruenz $n\,y \equiv l \bmod k$ eindeutig bestimmte Restklasse $y \bmod k$ zu verstehen.

Hilfssatz. *Es seien k und l beliebige natürliche Zahlen, $F(\sigma; k, l)$ eine für $\sigma \geqq 1$ erklärte komplexwertige Funktion, welche nur von σ und der Restklasse $l \bmod k$ abhängt, und*

$$G(x; k, l) := \log x \sum_{\substack{n<x \\ (n,k)=1}} F\left(\frac{x}{n}; k, \frac{l}{n}\right); \tag{16}$$

[6]) Vgl. etwa [4], Satz 22 und (83).

dann gilt

$$\sum_{\substack{d<x\\(d,k)=1}} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d};\, k,\, \frac{l}{d}\right) = F(x;\, k,\, l)\log x + \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \Lambda(n)\, F\left(\frac{x}{n};\, k,\, \frac{l}{n}\right). \tag{17}$$

Beweis. Durch Einsetzen von (16) in die linke Seite von (17) entsteht

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\substack{d<x\\(d,k)=1}} \mu(d)\, G\left(\frac{x}{d};\, k,\, \frac{l}{d}\right) &= \sum_{\substack{d<x\\(d,k)=1}} \mu(d)\log\frac{x}{d} \sum_{\substack{n<(x/d)\\(n,k)=1}} F\left(\frac{x}{dn};\, k,\, \frac{l}{dn}\right)\\ &= \sum_{\substack{nd<x\\(nd,k)=1}}\sum \mu(d)\log\frac{x}{d}\, F\left(\frac{x}{dn};\, k,\, \frac{l}{dn}\right).\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das Paar n, d wird jetzt vermöge $m := n\,d$ ersetzt durch das Paar m, d; dann geht die Bedingung $n\,d \leqq x$ über in die Bedingungen $m \leqq x$, $d \mid m$; wir können also in (18) wegen $\log(x/d) = \log(x/m) + \log(m/d)$ fortfahren:

$$= \sum_{\substack{m<x\\(m,k)=1}} F\left(\frac{x}{m};\, k,\, \frac{l}{m}\right) \sum_{d\mid m} \mu(d)\left(\log\frac{x}{m} + \log\frac{m}{d}\right),$$

woraus sich wegen (10) und (12) die rechte Seite von (17) und damit die Behauptung ergibt.

Satz. *Für* $x \geq 1$ *und* $(k, l) = 1$ *gilt* (3).

Beweis. Bei der zweimaligen Anwendung des Hilfssatzes schreiben wir F_1, G_1 und F_2, G_2 für F, G. Mit $F_1(x;\, k, l) := \psi(x;\, k, l)$ erhält man vermöge (16) und (1) zunächst

$$G_1(x;\, k, l) = \log x \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \sum_{\substack{d<(x/n)\\ d\equiv(l/n) \bmod k}} \Lambda(d) = \log x \sum_{\substack{nd<x\\ nd\equiv l \bmod k}}\sum \Lambda(d),$$

da wegen $(k, l) = 1$ und $n\,d \equiv l \bmod k$ von selbst $(n, k) = 1$ erfüllt ist. Das Paar n, d wird jetzt vermöge $m := n\,d$ ersetzt durch das Paar m, d; dann geht die Bedingung $n\,d \leqq x$ über in die Bedingungen $m \leqq x$, $d \mid m$; wegen (11) und (9) folgt

$$G_1(x;\, k, l) = \frac{x}{k}(\log x)^2 - \frac{x}{k}\log x + O\big((\log x)^2\big).$$

Mit

$$F_2(x;\, k, l) := \frac{1}{\varphi(k)}(x - C_2 - 1)$$

erhält man vermöge (16) wegen (7) und (5) noch

$$G_2(x;\, k, l) = \frac{x}{k}(\log x)^2 - \frac{x}{k}\log x + O(\log x).$$

Es folgt

$$G_1(x;\, k, l) - G_2(x;\, k, l) = O\big(\sqrt{x}\big).$$

Daher unterscheiden sich die linken Seiten von (17) für G_1 und G_2 um höchstens

$$\sum_{d<x} O\left(\sqrt{\frac{x}{d}}\right) = O(x)$$

voneinander; also unterscheiden sich auch die rechten Seiten von (17) für F_1 und F_2 um höchstens $O(x)$ voneinander:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x;k,l)\log x + \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \psi\left(\frac{x}{n};k,\frac{l}{n}\right)\Lambda(n) = \\ &= \frac{\log x}{\varphi(k)}(x - C_2 - 1) + \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n} - C_2 - 1\right) + O(x)\,. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Aus (19), (13), (14) und (15) folgt die Behauptung. G. J. RIEGER, München

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. J. RIEGER, *Ein weiterer Beweis der Selbergschen Formel für Idealklassen mod f in algebraischen Zahlkörpern.* Math. Ann. *134*, 403–407 (1958).
[2] G. J. RIEGER, *Eine Selbergsche Identität für algebraische Zahlen*, Math. Ann. *145*, 77–80 (1962).
[3] W. SPECHT, *Elementare Beweise der Primzahlsätze* (Berlin 1956).
[4] E. TROST, *Primzahlen* (Basel/Stuttgart 1953).

Sur les nombres pseudopremiers carrés

On appelle pseudopremiers les nombres composés n tels que $n \mid 2^n - 2$. Dans le travail [4][1]) j'ai démontré qu'il existe une infinité de nombres pseudopremiers triangulaires. Ici je démontrerai la proposition suivante:

Théorème. *Les seuls nombres pseudopremiers* $< 10^{12}$ *qui sont carrés sont les nombres* 1093^2 *et* 3511^2.

Lemme. *Si* n^2 (où n est un entier positif) *est un nombre pseudopremier, alors pour tout diviseur premier* p *de* n *on a* $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$.

Démonstration du lemme. Soit n^2 un nombre pseudopremier. On a alors $2 \nmid n$, puisqu'il n'existe aucun nombre pseudopremier divisible par 4. Il résulte donc de $n^2 \mid 2^{n^2} - 2$ que $n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$. Supposons que p est un nombre premier >2 tel que $p \mid n$ et soit δ l'exposant auquel appartient le nombre $2 \bmod p$. Si $p^2 \mid 2^\delta - 1$ on a, d'après $\delta \mid p - 1$, $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$. Supposons que $p^2 \nmid 2^\delta - 1$. Alors, pour qu'on ait $p^2 \mid 2^x - 1$ où x est un entier positif, il faut qu'on ait $p\,\delta \mid x$ (voir [5], p. 52). Donc, d'après $p^2 \mid n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$ on a $p \mid n^2 - 1$, ce qui est impossible, vu que $p \mid n$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Démontration du théorème. Les nombres $p^2 = 1093^2$ et $p^2 = 3511^2$ sont pseudopremiers, puisqu'on a pour ces nombres

$$p^2 \mid 2^{p-1} - 1 \mid 2^{p^2-1} - 1 \mid 2^{p^2} - 2\,.$$

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 40.