Sur les nombres pseudopremiers carrés

Autor(en): **Rotkiewicz, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 2

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23924

voneinander; also unterscheiden sich auch die rechten Seiten von (17) für F_1 und F_2 um höchstens $O(x)$ voneinander:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x;k,l)\log x + \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \psi\left(\frac{x}{n};k,\frac{l}{n}\right)\Lambda(n) = \\ &\qquad = \frac{\log x}{\varphi(k)}(x - C_2 - 1) + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\substack{n<x\\(n,k)=1}} \Lambda(n)\left(\frac{x}{n} - C_2 - 1\right) + O(x)\,. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Aus (19), (13), (14) und (15) folgt die Behauptung. G. J. RIEGER, München

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. J. RIEGER, *Ein weiterer Beweis der Selbergschen Formel für Idealklassen modf in algebraischen Zahlkörpern.* Math. Ann. *134*, 403–407 (1958).
[2] G. J. RIEGER, *Eine Selbergsche Identität für algebraische Zahlen,* Math. Ann. *145*, 77–80 (1962).
[3] W. SPECHT, *Elementare Beweise der Primzahlsätze* (Berlin 1956).
[4] E. TROST, *Primzahlen* (Basel/Stuttgart 1953).

Sur les nombres pseudopremiers carrés

On appelle pseudopremiers les nombres composés n tels que $n \mid 2^n - 2$. Dans le travail [4][1]) j'ai démontré qu'il existe une infinité de nombres pseudopremiers triangulaires. Ici je démontrerai la proposition suivante:

Théorème. *Les seuls nombres pseudopremiers* $< 10^{12}$ *qui sont carrés sont les nombres* 1093^2 *et* 3511^2.

Lemme. *Si* n^2 (où n est un entier positif) *est un nombre pseudopremier, alors pour tout diviseur premier* p *de* n *on a* $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$.

Démonstration du lemme. Soit n^2 un nombre pseudopremier. On a alors $2 \nmid n$, puisqu'il n'existe aucun nombre pseudopremier divisible par 4. Il résulte donc de $n^2 \mid 2^{n^2} - 2$ que $n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$. Supposons que p est un nombre premier >2 tel que $p \mid n$ et soit δ l'exposant auquel appartient le nombre $2 \bmod p$. Si $p^2 \mid 2^\delta - 1$ on a, d'après $\delta \mid p-1$, $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$. Supposons que $p^2 \nmid 2^\delta - 1$. Alors, pour qu'on ait $p^2 \mid 2^x - 1$ où x est un entier positif, il faut qu'on ait $p\,\delta \mid x$ (voir [5], p. 52). Donc, d'après $p^2 \mid n^2 \mid 2^{n^2-1} - 1$ on a $p \mid n^2 - 1$, ce qui est impossible, vu que $p \mid n$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

Démontration du théorème. Les nombres $p^2 = 1093^2$ et $p^2 = 3511^2$ sont pseudopremiers, puisqu'on a pour ces nombres

$$p^2 \,\big|\, 2^{p-1} - 1 \,\big|\, 2^{p^2-1} - 1 \,\big|\, 2^{p^2} - 2\,.$$

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 40.

On sait (voir [1]) que les seuls nombres premiers $p < 10^6$ pour lesquels $p^2 | 2^{p-1} - 1$ sont $p = 1093$ et $p = 3511$. Donc, si le nombre pseudopremier n^2 a un diviseur premier p autre que 1093 et 3511, alors, d'après le lemme on a $p^2 | 2^{p-1} - 1$ et $p > 10^6$, d'où $n^2 > 10^{12}$. Donc un nombre pseudopremier $n^2 \leqq 10^{12}$ peut avoir comme diviseurs premiers seulement les nombres 1093 et 3511. Comme $1093^2 \cdot 3511^2 > 10^{12}$, notre théorème est démontré (On peut d'ailleurs démontrer que le nombre $1093^2 \cdot 3511^2$ n'est pas pseudopremier).

Les nombres premiers p, pour lesquels $p^2 \mid 2^{p-1} - 1$ sont liés avec l'équation

$$x^2 - y^p = 1\,. \tag{1}$$

Comme on sait (voir [3]), si les entiers positifs x et y et le nombre premier p satisfont à l'équation (1) et si l'on n'a pas $x = 3$, $y = 2$, $p = 3$, alors on a

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad \text{et} \quad 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \tag{2}$$

et, comme l'ont démontré K. Inkeri et S. Hyyrö (voir [2])

$$x > 2^{p(p-2)}, \quad y > 4^{p-2}. \tag{3}$$

Comme $p^2 \nmid 3^{p-1} - 1$ pour p égal à 1093 ou à 3511, on a $p > 10^6$ et, d'après (3) on a $x > 10^{3.10^{11}}$ et $y > 10^{6.10^5}$. Donc, *si les nombres naturels x, y, n autres que le système $x = 3$, $y = 2$, $n = 3$, satisfont à l'équation $x^2 - y^n = 1$, on a $x > 10^{3.10^{11}}$, $y > 10^{6.10^5}$ et $n > 10^6$.*

A. Rotkiewicz (Varsovie)

TRAVAUX CITÉS

[1] M. Hausner and D. Sachs, *On the Congruence $2^p \equiv 2 \pmod{p^2}$*, Amer. Math. Monthly *70*, 996 (1963).
[2] K. Inkeri and S. Hyyrö, *On the Congruence $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ and the Diophantine Equation $x^2 - 1 = y^p$*, Ann. Univ. Turkuensis Sci. An. *50* (1961).
[3] R. Obláth, *Über die Zahl $x^2 - 1$*, Mathematica B, Zutphen *8*, 161–172 (1940).
[4] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, El. Math. *19*, 82 (1964).
[5] W. J. LeVeque, *Topics in Number Theory*, vol. I, Reading 1956.

Aufgaben

Aufgabe 473. Einem Kreis vom Radius r sind drei kongruente Ellipsen einzubeschreiben, die sich paarweise so berühren, dass sie eine Figur mit drei Symmetrieachsen bilden. Welche numerische Exzentrizität müssen die Ellipsen haben, damit sie den grösstmöglichen Teil der Kreisfläche bedecken, und wie gross wird dieser Bruchteil?

C. Bindschedler, Küsnacht

1. Lösung. Einem der drei Kreissektoren, die je eine Ellipse enthalten sollen, werde eine Raute umbeschrieben, von der zwei Seiten auf den (verlängerten) Begrenzungsradien des Sektors liegen. Die beiden andern Seiten berühren den Kreis in ihren Mittelpunkten. Die grösste der Raute einbeschriebene Ellipse berührt diese ebenfalls in den Seitenmitten, denn mit ihr zusammen ist die Raute affines Bild eines Quadrats mit Inkreis. Diese Ellipse ist aber zugleich dem Kreissektor einbeschrieben, da sie den Kreis in denselben beiden Punkten (je zweipunktig) berührt, ihn also nicht ausserdem noch durchsetzen kann. Jede andere dem Sektor einbeschriebene Ellipse ist nun kleiner als die zu ihr ähnliche, die der Raute