# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

Since we also have

$$\frac{h_1}{a_3} = \frac{h_3}{a_1} = \sin \alpha_2 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},$$

it is evident that (1) holds for all $k$. It is readily seen that equality occurs if and only if $A_1 A_2 A_3$ is equilateral.

J. STEINIG, Zürich

REFERENCES

[1] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA, «*Inequalities*», Cambridge University Press, 1959 (second edition), particularly pages 12 and 15.
[2] A. MĄKOWSKI, *Some Geometric Inequalities*, El. Math. *17*, 40–41 (1962).
[3] O. REUTTER, *Ergänzende Bemerkungen zu der Arbeit von A. Mąkowski "Some Geometric Inequalities"*, El. Math. *18*, 34–35 (1963).

# Aufgaben

**Aufgabe 476.** Démontrer qu'il existe une infinité des entiers positifs, tels que si dans leur développement décimal on change un seul chiffre, on n'obtient jamais un nombre premier, et trouver le plus petit tel entier. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

*Lösung.* Die natürlichen Zahlen $a_n = 19!\, n + 10$, $n = 1, 2, \ldots$ haben die gewünschten Eigenschaften: Umänderung der letzten Ziffer in $k$ $(0 \leqslant k \leqslant 9)$ ergibt die Zahl $a_n + k$, die den Teiler $10 + k$ hat; Veränderung irgendeiner anderen Ziffer ergibt eine gerade Zahl, so dass man in keinem Fall eine Primzahl erhält. Durch Probieren findet man als kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften sofort 200. J. SPILKER, Freiburg/Br.

J. H. VAN LINT (Eindhoven) bemerkt, dass die Zahlen mit der in der Aufgabe angegebenen Eigenschaft positive Dichte haben. (Ist $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge und $A(n)$ die Anzahl der $a_i \leqq n$, so versteht man unter der Dichte der Folge den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A(n)/n$.) Diese Dichte ist $\geqq 0{,}6$, denn die Dichte der Zahlen $\equiv 0 \pmod 2$ oder $\equiv 0 \pmod 5$ hat den Wert 0,6, während die Dichte der Primzahlen Null ist.

Eine weitere Lösung sandte K. WOLFF (Glarus).

**Aufgabe 477.** Man bestimme diejenigen ganzzahligen arithmetischen Folgen dritter Ordnung, für die die Summe der ersten $n$ Glieder stets eine Quadratzahl ist.

W. JÄNICHEN, Berlin

*Lösung:* Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3$ hat die Summe

$$S_n = n\, c_0 + \frac{n\,(n+1)}{2}\, c_1 + \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}\, c_2 + \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\, c_3 .$$

Die Konstanten $c_i$ sind hier rational. $S_n$ muss für jede genügend grosse Primzahl $n$ durch $n$ und als Quadratzahl auch durch $n^2$ teilbar sein. Das bedingt $6\,c_0 + 3\,c_1 + c_2 = 0$ oder $c_2 = -3\,(2\,c_0 + c_1)$. Damit wird

$$S_n = \frac{n^2}{4}\,\{c_3\,(n+1)^2 - 4\,(c_1 + 2\,c_0)\,(n+1) - 4\,c_0\}\,. \tag{1}$$

Eine quadratische Funktion $y = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$, die für unendlich viele ganzzahlige $x$ mit der Differenz $\Delta x = 1$ Quadratzahlen darstellt (was zunächst $\alpha > 0$ bedingt), muss das Quadrat einer linearen Funktion sein. Denn für die Gleichung $y^2 = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$, die im allgemeinen eine Hyperbel darstellt, ist der Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$ für $\Delta x = 1$ im allgemeinen nicht ganzzahlig, da er mit $x$ variabel ist und gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn $x$ alle natürlichen Zahlen durchläuft (Der Grenzwert ist das Steigungsmass

einer Asymptote). Die Hyperbelgleichung muss also zerfallen und stellt dann zwei zur $x$-Achse symmetrische Geraden dar:

$$y^2 - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \equiv (y + (A x + B))\,(y - (A x + B))\,.$$

Also ist $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv (A x + B)^2$.

Der Klammerausdruck in (1) hat also die Form $(k\,(n + 1) + 2\,m)^2$ und man hat $c_3 = k^2$, $c_0 = -m^2$, $c_1 = m\,(2\,m - k)$. Hieraus folgt

$$a_n = -m^2 + m\,(2\,m - k)\,n + 3\,k\,m\,n^2 + k^2\,n^3\,. \tag{2}$$

Man erkennt leicht, dass $k$ und $m$ ganzzahlig sein müssen. Wäre nämlich $m$ gebrochen, so würden in (2) alle Glieder ausser $-m^2$ für gewisse $n$ ganzzahlig. Aus $a_1 = (k + m)^2$ folgt dann, dass auch $k$ ganz sein muss. C. Bindschedler, Küsnacht

Es ist bekannt, dass eine ganze rationale Funktion, die für jeden ganzen positiven Wert von $x$ eine Quadratzahl darstellt, das Quadrat einer ganzen rationalen Funktion ist. Analoges gilt auch für höhere Potenzen. (Vgl. Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II. S. 135 (Aufgabe VIII 114.)

**Aufgabe 478.** Von vier positiven Zahlen $x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ kennt man die ersten vier Potenzmittel

$$M_n = \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i^n\right)^{1/n} \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

Wie können die $x_i$ exakt berechnet werden?
Zahlenbeispiel: $M_1 = 9$, $M_2 = 2\sqrt{21}$, $M_3 = 0{,}5\sqrt[3]{6474}$, $M_4 = \sqrt[4]{8004}$.

G. Güttler, Frankfurt a. M.

*Lösung:* Die vier gesuchten Grössen $x_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ seien die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades von der Form $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$. Bezeichnet man mit $s_n$ die Summe der $n$-ten Potenzen der $x_i$, so findet man $s_k = 4\,M_k^k$ und man kann mittelst den bekannten Newtonschen Gleichungen die Koeffizienten $a_k$ berechnen. Man findet $s_1 = -a_1 = 36$, $s_2 = 336$, $s_3 = 3237$ und $s_4 = 32016$. Damit ergibt sich $a_2 = 480$, $a_3 = -2807$ und $a_4 = 6072$.

Um die Gleichung

$$x^4 - 36\,x^3 + 480\,x^2 - 2807\,x + 6072 = 0$$

aufzulösen, führt man die Substitution $x = y + 9$ durch und kommt auf die reduzierte Gleichung:

$$y^4 - 6\,y^2 + y + 6 = 0\,,$$

die sofort die Wurzeln $y_1 = -1$ und $y_2 = 2$ erkennen lässt. Die andern beiden Lösungen sind die Wurzeln der Gleichung

$$(y^4 - 6\,y^2 + y + 6) : (y^2 - y - 2) = y^2 + y - 3 = 0\,.$$

Man erhält $y_3 = -0{,}5\,(1 + \sqrt{13})$ und $y_4 = -0{,}5\,(1 - \sqrt{13})$ und damit als Endergebnis:

$$x_1 = 8\,, \quad x_2 = 11\,, \quad x_3 = 8{,}5 - 0{,}5\sqrt{13}\,, \quad x_4 = 8{,}5 + 0{,}5\sqrt{13}\,.$$

Karl Schuler, Rottweil

Weitere Lösungen sandten F. Götze, Jena DDR, H. Gaebelein BRD, H. Meili, Winterthur, K. Zacharias, Berlin.

**Aufgabe 479.** Démontrer que pour tout entier $k \geqq 0$ il existe un nombre naturel $a_k$ tel que l'équation $x^2 + y^2 = a_k$ a précisément $k$ solutions distinctes en nombres naturels $x$, $y$. Trouver les plus petits nombres $a_k$ pour $1 \leqq k \leqq 5$. W. Sierpiński, Varsovie

*Lösung:* $a_k$ ist Norm von $x + i\,y$ im Körper $R(i)$. Gilt nun für die Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ die Zerlegung $p = \pi\,\pi'$, so hat die Gleichung $x^2 + y^2 = p^n$ bei ungeradem $n$ genau

$n + 1$ Lösungen, da $p^n$ Norm der $(n + 1)/2$ nichtreellen Zahlen $\pi^n, p\,\pi^{n-2}, \ldots, p^{(n-1)/2}\,\pi$ ist und jede Darstellung als Norm zu zwei Lösungen $x, y$ und $y, x$ führt. Damit ist die Behauptung für gerades $k$ erwiesen (Für $k = 0$ ist sie evident).

Damit die Lösungsanzahl ungerade wird, muss es eine Norm mit $x = y$ geben. Das ist der Fall für $a_{2n+1} = 2\,p^{2n}$. $a_{2n+1}$ ist hier Norm der $n + 1$ Zahlen $(1 + i)\,\pi^{2n}$, $(1 + i)\,p\,\pi^{2n-2}, \ldots, (1 + i)\,p^n$, von denen mit Ausnahme der letzten jede zu zwei Lösungen führt. Die Gleichung hat also hier $2\,(n + 1) - 1 = 2\,n + 1$ verschiedene Lösungen.

Die so ermittelten Zahlen $a_k$ sind nicht immer die kleinsten. Als solche findet man $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5^2 = 50$, $a_4 = 5 \cdot 13 = 65$, $a_5 = 2 \cdot 5^4 = 1250$.

C. Bindschedler, Küsnacht

In der kanonischen Primzahlzerlegung der natürlichen Zahl $n$ sollen alle Primfaktoren der Form $4\,m + 3$ mit geradem Exponenten auftreten, während $\alpha_i$ der Exponent des Primfaktors $p_i \equiv 1 \pmod 4$ sei. $r(n)$ sei die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung $n = x^2 + y^2$, wobei bei der Zählung sowohl die Reihenfolge von $x$ und $y$ als auch ihre Vorzeichen unterschieden werden. Bekanntlich (vgl. Hardy-Wright: Einführung in die Zahlentheorie, München 1958, S. 275) ist dann $r(n) = 4\,\Pi\,(\alpha_i + 1)$. Auf Grund dieses Satzes erhält der Aufgabensteller $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$, denn offensichtlich ist bei Beschränkung auf natürliche Zahlen die Lösungsanzahl $r(n)/4 = k$. J. Steinig (Zürich) unterscheidet die Lösungen $x, y$ und $y, x$ nicht und erhält in diesem Fall $a_k = p^{2k}$, wo $p$ eine Primzahl der Form $4\,m + 1$ ist.

Weitere Lösungen sandten H. Gaebelein (Helmstedt) und W. Jänichen (Berlin).

**Aufgabe 480.** Démontrer que chacune des progressions $8\,k + 1$, $8\,k + 3$, $8\,k + 5$ et $8\,k + 7$ $(k = 1, 2, \ldots)$ contient une infinité des nombres pseudopremiers (c'est-à-dire des nombres composés $n$ tels que $n \mid 2^n - 2$). A. Rotkiewicz, Varsovie

*Solution de l'Auteur:* On vérifie sans peine que si $n$ est un nombre pseudopremier, le nombre $2^n - 1$ est aussi pseudopremier[1]). Pareillement, si $3 \nmid n$ et $n$ est un nombre pseudopremier impair, le nombre $(2^n + 1)/3$ est aussi pseudopremier. En effet, si $3 \nmid n$, $2 \nmid n$ et $n$ est un nombre pseudopremier, on a $2\,n \mid (2^n - 2)/3$. Donc

$$\frac{2^n + 1}{3} \,\Big|\, 2^n + 1 \,\Big|\, 2^{2n} - 1 \,\Big|\, 2^{(2^n-2)/3} - 1 \,\Big|\, 2^{(2^n+1)/3} - 2$$

et le nombre $(2^n + 1)/3$ est aussi pseudopremier. Pareillement on démontre sans peine que si $3 \nmid n$ et $n$ est un nombre pseudopremier, le nombre $(2^{2n} - 1)/3$ est aussi pseudopremier.

Soit $F_m = 2^{2^m} + 1$. On vérifie sans peine que les nombres $F_m\,F_{m+1}$, où $m = 2, 3, \ldots$, sont pseudopremiers. Donc les nombres $n$, $(2^n + 1)/3$, $(2^{2n} - 1)/3$, $2^n - 1$, où $n = F_m\,F_{m+1}$, sont pour $m = 2, 3, \ldots$ pseudopremiers. Comme $n = F_m\,F_{m+1} \equiv 1 \pmod 8$, $(2^n + 1)/3 \equiv 3 \pmod 8$, $(2^{2n} - 1)/3 \equiv 5 \pmod 8$ et $2^n - 1 \equiv 7 \pmod 8$, chacune des progessions $8\,k + 1$, $8\,k + 3$, $8\,k + 5$ et $8\,k + 7$ contient une infinité des nombres pseudopremiers.

# Neue Aufgaben

**Aufgabe 501.** Man bestimme den geometrischen Ort für das Zentrum einer räumlichen Inversion, welche drei gegebene Punkte in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbildet. C. Bindschedler, Küsnacht

**Aufgabe 502.** Man bestimme die Zentren der Inversionen, welche vier gegebene Punkte des Raumes in die Ecken eines Parallelogramms abbilden.

C. Bindschedler, Küsnacht

---

[1]) Voir W. Sierpiński: *Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres* $(2^n - 2)/n$, Colloquium Math. *1*, 9 (1947).

**Aufgabe 503.** Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n-k+1}.$$

Zeige, dass $f(z)$ auf der positiven reellen Achse eine singuläre Stelle hat.

J. H. VAN LINT, Technische Hochschule, Eindhoven

**Aufgabe 504.** Est-il vrai que si $n$ est un entier positif $> 5$, il existe au moins un entier positif $x < n$ tel que le nombre $x^2 + n$ est premier? (Cela est vrai pour $5 < n \leqq 100$). Sinon, trouver le plus petit entier $n > 5$ pour lequel un tel entier $x < n$ n'existe pas. (L'auteur de ce problème ne connait pas sa solution.) W. SIERPIŃSKI, Varsovie

# Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, $x$-Achse nach rechts, $y$-Achse nach vorn, $z$-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. $A_1$, $A_2$ sind die Hauptscheitel einer Ellipse, $P_1$, $P_2$ zwei beliebige Ellipsenpunkte. Die Geraden $A_1P_1$ und $A_2P_2$ schneiden sich in $S_1$, $A_1P_2$ und $A_2P_1$ schneiden sich in $S_2$. Stets ist $S_1S_2 \perp A_1A_2$.

   ▶ Es genügt, den Satz für einen Kreis mit dem Durchmesser $A_1A_2$ zu beweisen. $S_2$ ist Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1A_2S_1$.

2. Für diejenigen Durchmesser $2\,d$ der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b > a,$$

   die senkrecht auf einer Asymptote stehen, gilt

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

3. Wo schneiden sich die beiden Kurven

$$y_1 = e^x \quad \text{und} \quad y_2 = x^{100}?$$

   ▶ $1{,}010 < x_1 < 1{,}011$
   $647 < x_2 < 648.$

4. Über zwei Mittellinien $BV$ und $CW$ eines Dreiecks $ABC$ als Durchmesser werden die Kreise gezeichnet. Die Potenzgerade dieser zwei Kreise enthält die dritte Höhe $AA'$.

   ▶ Die Kreise gehen durch die Höhenfusspunkte $B'$, bzw. $C'$. Hieraus findet man leicht $AW \cdot AC' = AV \cdot AB'$. $A$ liegt also auf der Potenzgerade, ausserdem steht diese senkrecht auf der Zentrale der beiden Kreise.

5. Eine variable Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ berührt den Kreis in $P$ und schneidet die $x$-Achse in $X$. Welches ist der geometrische Ort des Inkreiszentrums $Z$ des Dreiecks $OPX$?

   ▶ $P$ liege im ersten Quadranten. Verbinde $Z$ mit $P$ und mit $A(r; 0)$. Die Dreiecke $OPZ$ und $OAZ$ sind kongruent, folglich ist $\sphericalangle OAZ = 45°$. Der geometrische Ort besteht also

aus *Teilen* der Seiten des Quadrates mit den Ecken $(\pm r; 0)$ und $(0; \pm r)$. Ein einheitlicher Ort ergibt sich erst, wenn man auch die Zentren der Ankreise berücksichtigt. Er besteht dann aus den Geraden $x + y = \pm r$ und $x - y = \pm r$.

# Literaturüberschau

*Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker.* Von H. SIRK und M. DRAEGER. 9. Auflage. XII und 385 Seiten mit 132 Abbildungen. DM 25.20. Verlagsbuchhandlung Theodor Steinkopff, Dresden 1963.

Der bekannte «Sirk» ist in neunter Auflage als «Sirk/Draeger» neu aufgelegt worden. Professor Dr. MAX DRAEGER, Potsdam, hat das verbreitete Buch neu bearbeitet, aber an der bewährten Grundtendenz des Werks festgehalten. Dieser leitende Grundgedanke heisst: Erarbeitung der Begriffe der höheren Mathematik an bekannten Erfahrungen aus Physik und Chemie und nachherige Anwendung der gewonnenen Erkenntnisse auf weitere Beispiele aus den obengenannten Gebieten. Wenn dabei gelegentlich die letzte mathematische Strenge bewusst nicht eingehalten wird, dann ist dort auf die rein mathematische Literatur hingewiesen.

Das Buch behandelt im 1. Teil einige Kapitel aus der Elementarmathematik (unter anderem einige Begriffe der analytischen Geometrie, der Kombinatorik und Determinanten), im 2. Teil Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen, im 3. Teil Funktionen mehrerer Veränderlichen, im 4. Teil Differentialgleichungen, im 5. Teil Unendliche Reihen und Näherungsverfahren und im letzten Teil Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Da das Buch seit 1940 in 9 Auflagen erschienen ist, entspricht es offenbar einem verbreiteten Bedürfnis und erfüllt seinen Zweck sehr gut, nämlich dem Chemiker und Naturwissenschaftler die Mathematik auf eine Art und Weise näher zu bringen, die dem Leser zusagt und ihn ermuntert, weiter zu studieren. Wenn im folgenden einige Schönheitsfehler erwähnt werden, dann soll dies nicht als Kritik am Aufbau dieses sehr empfehlenswerten Werks aufgefasst werden.

Auf Seite 379 steht: «Umgekehrt besteht eine Probe für die Richtigkeit einer Formel darin, dass man prüft, ob die Dimensionen der rechten und linken Seite der Formel einander gleich sind». Gegen diesen Satz, der in der Physik allgemein gültig ist und in der Chemie auch immer mehr beachtet wird, verstösst der Autor zum Beispiel auf Seite 115 in der Formel: «Geschwindigkeit $v = \cos t$», denn es sollte heissen: $v = v_0 \cos \omega t$. Analog steht auf Seite 214 bei der Definition der spezifischen Wärme $c = dQ/dT$ statt $c = (1/m)\,(dQ/dT)$ und auf Seite 267 bei der Elongation einer Welle $s = a \sin(x - c\,t)$ und auf Seite 273 bei der Länge eines Metallstabes $L = 1 + \alpha\,\vartheta$. Auch bei der Formulierung von Aufgaben sollten die Ausgangsgrössen entweder nur mit Buchstaben oder dann mit Zahlen *und* Einheiten angegeben werden. In dieser Hinsicht ist eine Formulierung (Seite 147) «Die abstossende Kraft zwischen $+e$ und $+1$ ist nach dem Coulombschen Gesetz...» abzulehnen und zu ersetzen durch «zwischen $+e$ und $+Q$» oder «zwischen $+e$ und 1 Coulomb». Analog nützt eine Angabe von Zahlenwerten der van der Waalschen Konstanten $a$ und $b$ (Seite 296) nichts, wenn die Einheiten nicht angegeben werden. W. BANTLE

*Konstruktive Abbildungsgeometrie.* Von MAX JEGER. Dritte, neubearbeitete und erweiterte Auflage. 99 Seiten mit 103 Figuren. Fr. 10.80. Räber Verlag, Luzern und Stuttgart 1964.

Die kürzlich in der Luzerner Schriftenreihe zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts erschienene dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage stellt einen eigentlichen Lehrgang in Abbildungsgeometrie dar.

Das rund 100 Seiten fassende Bändchen gehört in die Hand eines jeden Mittelschullehrers, der nicht nur über eine Reform des Geometrieunterrichts theoretisiert, sondern dieselbe im Unterricht stufenweise einzuführen gedenkt.