Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 4

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Terminons par un exemple numérique: Soit à résoudre l'équation fonctionnelle $f(16\,x) - 9\,f(8\,x) + 29\,f(4\,x) - 39\,f(2\,x) + 18\,f(x) = 0$. Nous pouvons écrire $(A^4 - 9\,A^3 + 29\,A^2 - 39\,A + 18\,I)\,f(x) = 0$, avec $A = A(2)$, ou encore, $(A - 3\,I)^2\,(A - I)\,(A - 2\,I)\,f(x) = 0$. La solution générale de l'équation est $f(x) = x^{\ln 3/\ln 2}\,[\omega_1(x, 2) + \omega_2(x, 2)\ln x] + \omega_3(x, 2) + \omega_4(x, 2)\,x$.

En ce qui concerne l'équation non-homogène nous remarquons que l'on peut démontrer ici encore que la solution générale de l'équation non-homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène augmentée d'une solution particulière quelconque de l'équation non-homogène.

SELMO TAUBER, Portland State College, USA.

REFERENCES

[1] F. H. JACKSON, *q-Difference Equations*, Am. J. Math. *32*, 305–314 (1910).
[2] R. D. CARMICHAEL, *The General Theory of q-Difference Equations*, Am. J. Math. *34*, 147–168 (1912).
[3] C. R. ADAMS, *Linear q-Difference Equations*, Bull. Am. math. Soc. *37*, 361–400 (1931).
[4] N. E. NÖRDLUND, *Sur l'Etat Actuel de la Théorie des Equations aux Différences Finies*, Bull. Sci. math. (2) *44*, 174–192, 200–220 (1920).
[5] R. D. CARMICHAEL, *The Present State of the Difference Calculus and the Prospect for the Future*, Am. math. Mon. *31*, 169–183 (1924).
[6] N. E. NÖRDLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, copie de l'édition de 1924, par Chelsea N. Y. (1954).

Kleine Mitteilungen

Remarque sur l'axonométrie dimétrique

1. En axonométrie orthogonale on sait construire les axes axonométriques selon PASTERNAK, connaissant les longueurs l, m, n proportionnelles aux rapports de réduction $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et vérifiant la relation $l^2 + m^2 + n^2 = 2\,k^2$ [1]). Dans le cas de la dimétrie 1:2:2 (axonométrie des ingénieurs), REHBOCK[2]), HESS[3]) et PRAETORIUS[4]) ont publié presque simultanément une construction très élégante à l'aide d'un triangle auxiliaire de côtés 2, 2, 3. Nous montrons qu'un triangle analogue de côtés n, n, $k\sqrt{2}$ existe pour la dimétrie en général.

2. Nous utilisons le théorème: Le triangle orthique $X_1\,Y_1\,Z_1$ du triangle axonométrique $X\,Y\,Z$ a des côtés proportionnels aux carrés des rapports de réduction, donc proportionnels à l^2, m^2, n^2 [5]). En vertu des propriétés du triangle orthique et des quadrilatères inscrits les demi-angles ξ et η de ce triangle sont les angles de pente des axes $\overline{O}X$ et $\overline{O}Y$ avec l'horizontale. Comme $k\cos\alpha = l$ et $k\sin\alpha = \sqrt{k^2 - l^2}$, il vient

$$\sin\xi = \frac{O\,Z_1}{O\,X} = \frac{h\,\mathrm{tg}\,\gamma}{h\,\mathrm{ctg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sqrt{k^2 - l^2}\,\sqrt{k^2 - n^2}}{l\,n}\,.$$

Pour la dimétrie où $m = n$ et $l^2 = 2\,(k^2 - n^2)$ (1)

il vient
$$\sin\xi = \frac{\sqrt{k^2 - l^2}}{n\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos\xi = \frac{k}{n\sqrt{2}}\,.$$

---

[1]) Note sur l'axon. orthog., Enseign. math. *1925*, 106–110.
[2]) Zur Ingenieuraxonometrie, ZAMM *24*, 86 (1944).
[3]) Bemerkungen zur norm. dim. Axon., El. Math. *1*, 108–110 (1946).
[4]) Eine einfache und exakte Konstruktion..., ZAMM, *25/27*, 173–174 (1947).
[5]) Voir p.ex. ROSSIER, Perspective, p. 76 (Neuchâtel 1946).

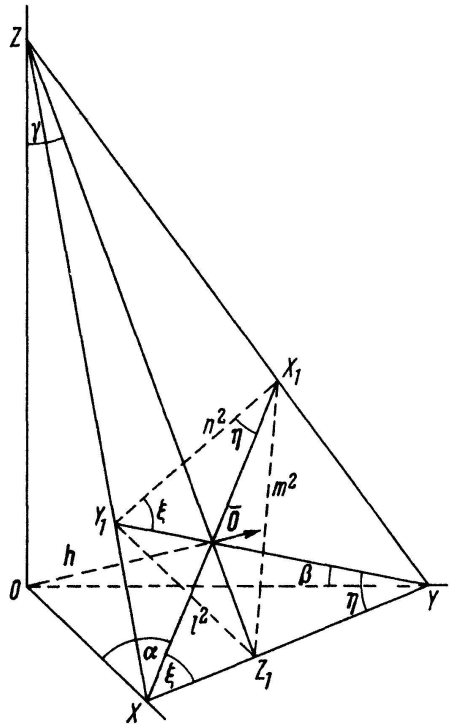
En prenant dans le triangle isocèle $Y\overline{O}Z$ les côtés $\overline{O}Y = \overline{O}Z = n$, le théorème des cosinus donne

$$YZ^2 = 2n^2 - 2n^2\cos(\pi - 2\xi) = 4n^2\cos^2\xi \quad \text{d'où} \quad YZ = 2n\cos\xi = k\sqrt{2}\,.$$

La construction des axes est la suivante: On place sur la verticale $\overline{O}Z = n$. Les cercles $(\overline{O}, n)$ et $(Z, k\sqrt{2})$ se coupent en Y. L'axe $\overline{O}X$ se trouve sur la médiatrice de YZ.

Voici des triangles à côtés entiers:

l	n	n	$k\sqrt{2}$	
1	2	2	3	(axonométrie des ingénieurs)
17	20	20	33	
23	24	24	41	
..	..	..	..	



3. Les cercles de rayon k dont le plan est parallèle à XOY (et à XOZ) ont pour projections des ellipses dont les demi-diamètres conjugués sont parallèles à $\overline{O}X$ et à $\overline{O}Y$ (ou à $\overline{O}Z$) et valent resp. l et n. En appliquant les théorèmes d'APOLLONIUS on trouve pour le rapport $a : b$ des axes des ellipses

$$a^2 + b^2 = l^2 + n^2 \quad \text{et} \quad ab = ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right) = ln\,\frac{k}{n\sqrt{2}} = \frac{lk}{\sqrt{2}}$$

On en déduit, en faisant usage de (1)

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{l^2 + n^2 + lk\sqrt{2}}{l^2 + n^2 - lk\sqrt{2}} = \frac{(l^2 + n^2 + lk\sqrt{2})^2}{(l^2+n^2)^2 - 2k^2l^2}\,,$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{l^2 + n^2 + lk\sqrt{2}}{n^2} \quad \text{où} \quad a:b = k\sqrt{2} : l\,.$$

En choisissant une dimétrie déterminée on peut se faire d'avance une idée de la forme des ellipses. On sait que pour le système 1:2:2 les ellipses sont trop allongées $(a:b = 3:1)$. Pour les cercles du plan YOZ un calcul analogue conduit au rapport $a:b = k\sqrt{2}:\sqrt{2n^2 - l^2}$.

L. KIEFFER, Luxembourg

On Estimating the Perimeter of an Ellipse

Let E be an ellipse with semi-axes a and b, $a > b$. HADWIGER, in [1], gives an elementary proof that the perimeter L of E satisfies

$$L > \pi (a + b). \tag{1}$$

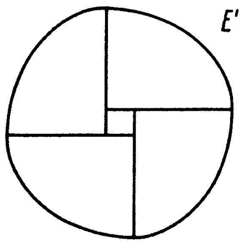
It is of interest to note that (1) is a consequence of an elegant «cutting and rearrangement» operation (see [2], page 158) and the isoperimetric inequality. One cuts the ellipse along its axes into four congruent pieces and rearranges these pieces into the figure E' (Figure). Then E' has perimeter L, and area $A + (a - b)^2$, where A is the area of E. The isoperimetric inequality, applied to E', yields $L^2 > 4 \pi (A + (a - b)^2)$, or

$$L^2 - 4 \pi A > 4 \pi (a - b)^2. \tag{2}$$

Using $A = \pi a b$, we have

$$L^2 > 4 \pi^2 ab + 4 \pi (a - b)^2 > \pi^2 (a + b)^2, \tag{3}$$

from which (1) follows.



G. D. CHAKERIAN, University of California, Davis/Calif.

REFERENCES

[1] H. HADWIGER, *Zur Schätzung des Ellipsenumfangs*, El. Math. *4*, 11–12 (1949).
[2] H. STEINHAUS, *Mathematical Snapshots* (Oxford University Press, New York 1960).

Aufgaben

Aufgabe 481. In einem Dreieck Δ seien a_i die Seiten, h_i die Höhen und r_i die Ankreisradien ($i = 1, 2, 3$). Ist F die Fläche, R der Umkreisradius und r der Inkreisradius von Δ, so beweise man die Gültigkeit der Ungleichungskette

$$4 \sum_{i<j} h_i h_j \leqq 12 F \sqrt{3} \leqq 54 R r \leqq 3 \sum_{i<j} a_i a_j \leqq 4 \sum_{i<j} r_i r_j .$$

Die aus dem Anfangs- und Endglied der Kette bestehende Ungleichung hat kürzlich A. MAKOWSKI angegeben: Problem E 1675, Amer. Math. Monthly *71*, 317 (1964).

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Solution:

(1) Since $4 \sum_{i<j} r_i r_j = \left(\sum a_i\right)^2$ and $3 \sum_{i<j} a_i a_j \leqq \left(\sum a_i\right)^2$, we get $3 \sum_{i<j} a_i a_j \leqq 4 \sum_{i<j} r_i r_j$.

(2) The inequality $18 R r \leqq \sum_{i<j} a_i a_j$ was proved by the proposer in his paper *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. *13*, 121–126 (1958).

(3) We have $a_1 a_2 a_3 = 16 r R^2 \prod \cos \frac{\alpha_i}{2} \leqq 6 \sqrt{3} r R^2$. Further, $F = \frac{a_1 a_2 a_3}{4 R}$, so that $2 F \leqq 3 \sqrt{3} r R$.