

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 21 (1966)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Aufgabe 505.** Es sei  $I$  der Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Befindet sich  $I$  auf der Eulerschen Geraden, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

ESTHER SZEKERES, Sydney/Australien

*Lösung:* Es seien  $O$  und  $J$  Um- und Inkreiszentrum,  $S$  der Schwerpunkt des Dreiecks,  $M_1$  und  $M_2$  die Mitten der Seiten  $A_2A_3$  und  $A_3A_1$ , ferner  $D_1$  und  $D_2$  die zweiten Schnittpunkte der Winkelhalbierenden  $A_1J$  und  $A_2J$  mit dem Umkreis. Die Geraden  $M_1D_1$ ,  $M_2D_2$  und (nach Voraussetzung)  $SJ$  gehen durch  $O$ . Die Dreiecke  $M_1M_2S$  und  $D_1D_2J$  sind also perspektiv. Wir nehmen an, dass homologe Geraden (wie  $M_1S$  und  $D_1J$ , das heisst eine Schwerlinie und eine Winkelhalbierende des gegebenen Dreiecks) nicht zusammenfallen (andernfalls wäre das Dreieck schon deshalb gleichschenkelig und nichts mehr zu beweisen). Dann ist aber  $A_1A_2$  die Desarguessche Gerade der perspektiven Dreiecke. Wegen  $M_1M_2 \parallel A_1A_2$  ist dann auch  $D_1D_2 \parallel A_1A_2$ . Daraus folgt die Gleichheit der Bogen  $\widehat{A_1A_3}$  und  $\widehat{A_2A_3}$  und damit auch der Seiten  $\overline{A_1A_3}$  und  $\overline{A_2A_3}$ . C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Herr W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe auch gilt, wenn der Inkreismittelpunkt durch einen der Ankreismittelpunkte ersetzt wird.

Weitere Lösungen (meistens durch Rechnung) sandten B. ANDERSEN (Hillerød), W. I. BLUNDON (Memorial Univ. of Newfoundland), H. FRISCHKNECHT (Berneck), H. GAEBELEIN (Helmstedt), L. KIEFFER (Luxemburg), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil).

**Aufgabe 506.**  $y = y(x)$  sei eine in der Umgebung  $U$  des Nullpunktes beliebig oft differenzierbare Funktion.  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) \neq 0$  werde vorausgesetzt. Man zeige, dass dann für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ \frac{x}{y(x)} \right]^n \right\}_{x=0} = \left\{ \left[ \frac{d}{y'(x) dx} \right]^n x \right\}_{x=0} = \left\{ \frac{d^n}{dy^n} x(y) \right\}_{y=0},$$

wobei  $x(y)$  die zu  $y(x)$  inverse Funktion ist.

G. BACH, Braunschweig

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir setzen voraus, dass  $y(x)$  in  $U$  in eine konvergente Taylorreihe entwickelbar ist. Dann lässt sich  $y(x)$  ins Komplexe fortsetzen und als eine an der Stelle  $x = 0$  regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen  $x$  ansehen, die wegen  $y'(0) \neq 0$  in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes  $x = 0$  schlicht ist. Wir können also einen Kreis  $K$  um  $x = 0$  so finden, dass  $y(x)$  innerhalb und auf  $K$  analytisch ist und auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $K$  keinen Wert mehr als einmal annimmt. Dann ist das Bild des Randes  $R$  von  $K$  eine einfach geschlossene Kurve  $R'$  in der komplexen  $y$ -Ebene um den Nullpunkt.

Nach CAUCHY hat man

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ \frac{x}{y(x)} \right]^n \right\}_{x=0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_R \left[ \frac{x}{y(x)} \right]^n \frac{dx}{x^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_R \frac{dx}{[y(x)]^n}.$$

Analog für die Umkehrfunktion

$$\left\{ \frac{d^n}{dy^n} x(y) \right\}_{y=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C x(y) \frac{dy}{y^{n+1}},$$

wobei  $C$  als geschlossene Kurve um den Nullpunkt der  $y$ -Ebene so gewählt werden muss, dass  $x(y)$  innerhalb und auf  $C$  eine reguläre Funktion von  $y$  ist. Nach den oben angestellten Überlegungen ist  $R'$  eine solche Kurve, mit  $C = R'$  kommt dann

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d^n}{dy^n} x(y) \right\}_{y=0} &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{R'} x(y) \frac{dy}{y^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int_R x \frac{y'(x) dx}{[y(x)]^{n+1}} \\ &= - \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_R x d\left( \frac{1}{[y(x)]^n} \right) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_R \frac{dx}{[y(x)]^n} \end{aligned}$$

(durch partielle Integration). Damit ist alles gezeigt.

**Aufgabe 507.** Man beweise: Ist  $R$  die reelle affine Ebene und  $P$  eine endliche Punktmenge von  $R$  und treffen alle Geraden und alle Kreise von  $R$ , die  $P$  in drei Punkten treffen,  $P$  sogar in vier Punkten, so sind die Punkte von  $P$  entweder kollinear oder konzyklisch.

HEINZ LÜNEBURG, Mainz

*Lösung:* Wir projizieren  $P$  stereographisch auf eine Kugel und führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, dass die Bildmenge  $P'$  nicht koplanar ist. Die Punkte von  $P'$  bilden dann die Ecken eines konvexen, der Kugel einbeschriebenen Polyeders, dessen Seitenflächen Kreisvierecke oder -vielecke sind. Nach Voraussetzung enthält jede Ebene durch drei Ecken mindestens eine weitere Ecke.

Es seien  $e, f, k$  die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders. Dann ist  $k \geq 4f/2 = 2f$ . Andererseits stossen in jeder Ecke mindestens 4 Kanten zusammen, denn sonst gäbe es Ebenen, die nur 3 Ecken des Körpers enthielten. Es ist also  $k \geq 4e/2 = 2e$ . Damit wird  $e + f \leq k$  im Widerspruch zur Eulerschen Gleichung.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Die Lösung des Aufgabenstellers benutzt die bekannte Tatsache, dass die Punkte einer endlichen Punktmenge der reellen Ebene kollinear sind, wenn jede Gerade durch zwei der Punkte einen dritten enthält.

**Aufgabe 494** (vgl. *El. Math.* 21, 18 (1966)). *Dritte Lösung:* Ist  $x$  ein Punkt der geschlossenen konvexen Kurve (über die man keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen machen muss),  $y$  ein Vektor parallel zu einer Stützgeraden durch  $x$  und  $h$  der Stützabstand zum Punkte  $x$ , so erhält man durch Betrachtung der entsprechenden Flächeninhalte unmittelbar  $\det(x, y) = h \|y\|$ . Bezeichnen wir die entsprechenden Grössen im Bild mit grossen Buchstaben, so ist ebenso  $\det(X, Y) = H \|Y\|$ , und es folgt sofort, wenn  $n$  das Affinitätsverhältnis und  $\lambda = \|Y\|/\|y\|$  ist,  $H : h = n : \lambda$ .

E. HEIL, Darmstadt

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 529.** Um je zwei zueinander orthogonale Kreise eines elliptischen Kreisbüschels werden die gemeinsamen Tangenten gelegt. Welches ist die Enveloppe dieser Tangentenpaare?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 530.** In der Ebene eines Dreiecks werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einer Dreiecksseite liegt. Man zeige, dass die sechs Fusspunkte der Ecktransversalen durch die beiden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

J. SCHOPP, Budapest

**Aufgabe 531.** Démontrer que, pour  $n$  naturel, la condition que le nombre  $2^n + 1$  soit premier n'est pas ni nécessaire ni suffisante pour que le nombre  $2^{2^n} + 1$  soit premier (contrairement à ce qu'écrivit M. H. VARCOLLIER à la page 15 de son livre *Nombres premiers, nombres avant-premiers*, Presses Universitaires de France, 1965).

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 532.** Die multiplikative Gruppe der zweireihigen quadratischen Matrizen mit komplexen Elementen und nichtverschwindender Determinante ist bekanntlich isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe der vierreihigen quadratischen Matrizen mit reellen Elementen und nichtverschwindender Determinante. Man zeige, dass dasselbe gilt, wenn man die komplexen Zahlen durch Dualzahlen  $a + b\varepsilon$  ( $\varepsilon^2 = 0$ ) ersetzt.

G. KIRSCHMER, München

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Konstruiere ein Dreieck  $ABC$  aus der Seite  $a$ , der Summe  $b + c = q$  und der Winkelhalbierenden  $w_\alpha = AD$ .

► Da mit  $a$  und  $q$  der Umfang bekannt ist, liegt es nahe, den Inkreis des Dreiecks mit dem Zentrum  $M$  und dem Berührungspunkt  $M'$  auf  $AB$  sowie den Ankreis an  $a$  mit dem Zentrum  $Z$  und dem Berührungspunkt  $Z'$  auf  $AB$  zu betrachten. Es ist

$$AZ' = \frac{q + a}{2}, \quad AM' = \frac{q - a}{2}.$$

$D'$  sei die Projektion von  $D$  auf  $AB$ .  $A$  und  $D$  sind die Ähnlichkeitszentren der beiden Kreise,  $A, D; M, Z$  bilden also eine harmonische Punktgruppe, folglich auch  $A, D'; M', Z'$ .  $D'$  ist konstruierbar und die Aufgabe leicht fertig zu lösen.

2. Auf einem Durchmesser des Kreises  $k(R)$  mit dem Zentrum  $M$  sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Durch  $A$  und  $B$  sind zwei gleichlange Sehnen zu legen, die von einem Punkt  $P$  auf  $k$  ausgehen.

►  $PM$  halbiert den Winkel der Sehnen, das Verhältnis der Sehnenabschnitte  $PA$  und  $PB$  ist bekannt, also Lösung mittels des Kreises von Apollonius. Der zu  $M$  bezüglich  $A, B$  harmonische Punkt muss ausserhalb  $k$  liegen, wenn die Aufgabe lösbar sein soll, woraus sich die Bedingung

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \leq \frac{2}{R}$$

ergibt.

3. In einem rechtwinkligen Dreieck wird die Halbierende des rechten Winkels gezogen. Die Inkreisradien der entstehenden Teildreiecke seien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Man konstruiere das Dreieck aus dem Verhältnis  $\varrho_1 : \varrho_2$  und dem Abstand  $d$  der Kreismittelpunkte.

► Sind  $D$  und  $E$  die Zentren der Inkreise, so ist vom Dreieck  $DEA$  die Grundlinie  $\check{d}$  und das Verhältnis der Seiten  $AD : AE = \varrho_1 : \varrho_2$  gegeben. Je nach Wahl des Verhältnisses  $\varrho_1 : \varrho_2$  sind die Bedingungen der Aufgabe für die innere oder für die äussere Winkelhalbierende erfüllt.

4. Man konstruiere ein Sehnen-Tangentenviereck  $ABCD$ , von dem der Umkreis  $k$  und die Seiten  $AB = a$ ,  $AD = b$  ( $a < b$ ) gegeben sind.

► 1. Lösung:  $C$  liegt auf der Hyperbel mit den Brennpunkten  $B, D$  und der Abstandsdifferenz  $b - a$ . Der Schnittpunkt von  $k$  und der Hyperbel kann nach Aufgabe 2, El. Math. 21, 20 (1966) leicht gefunden werden.

2. Lösung: Sei  $E$  der Schnittpunkt von  $DC$  mit dem Kreis um  $D$  und dem Radius  $b - a$ . Dann ist  $\sphericalangle DEB = 180^\circ - \alpha/2$ .

5. Gegeben sind ein Kreis  $k$  und zwei Punkte  $A$  und  $B$ . Man konstruiere auf  $k$  einen Punkt  $X$  so, dass die durch die Geraden  $AX$  und  $BX$  bestimmte Sehne ein Maximum oder ein Minimum wird.

► Zum Minimum gehört der kleinste, zum Maximum der grösste Peripheriewinkel bei  $X$ .  $X$  ist also der Berührungspunkt des Kreises durch  $A$  und  $B$ , der  $k$  berührt.

## Literaturüberschau

*Schülerversuche zur Elektrizitätslehre für höhere Schulen.* Von P. BÄCHTIGER. Heft 3 der Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts. 78 Seiten mit 29 Skizzen. Fr. 9.80. Räber Verlag, Luzern und Stuttgart 1965.

Bestimmt bedarf kein Kapitel der Physik so sehr der Untermauerung durch ein physikalisches Praktikum wie gerade die Elektrizitätslehre. Es ist deshalb sicher richtig, dass in der Sammlung «Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts» schon das Heft 3 sich mit diesem Problem befasst. Dr. P. BÄCHTIGER erweist sich als guter Pädagoge, indem er nicht einfach eine Anzahl Praktikumsexperimente beschreibt, sondern er stellt dem Schüler die Aufgabe und gibt ihm die vorhandenen experi-