Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 21 (1966)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[14] MEHMKE, R., *Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene*, Z. Math. Phys. *35*, 1–24, 65–81 (1890).
[15] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Die Zyklographie* (Leipzig und Wien 1929).
[16] MÜLLER, E., und J. L. KRAMES, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, Bd. 2: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig und Wien 1931).
[17] MÜLLER, H. R., *Kinematik* (Berlin 1963 [Sammlung Göschen]).
[18] MÜLLER, P. H., *Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise*, El. Math. *18*, 11–13 (1963).
[19] NEUBERG, J., *Sur les figures semblablement variables*, Proc. Lond. math. Soc. *16*, 185–188 (1885).
[20] SCHAAL, H., *Von der Bewegungsgeometrie zur konstruktiven Kinematik*, Der Math.-Unterr. *10*, H. 3: *Vom Problem zum System II*, 48–72 (1964).
[21] SIEBER, H., *Über Drehungen um 60°*, Der Math.-Unterr. *11*, H. 3: *Abbildungsgeometrie*, V, 24–38 (1965).
[22] WUNDERLICH, W., *Höhere Radlinien*, Öst. Ing.-Arch. *1*, 277–296 (1947).
[23] ZACHARIAS, M., *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, *AB* 9 (Leipzig 1914–1931), S. 859–1172.
[24] BERKHAN, G., und W. FR. MEYER, *Neuere Dreiecksgeometrie*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 3, *AB* 10 (Leipzig 1914–1931), S. 1173–1276.
[25] SCHOENFLIES, A., *Kinematik*, in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. 4, 1 B I 3 (Leipzig 1901–1908), S. 190–278.
[26] HOHENBERG, F. und J. TSCHUPIK, *Grundzüge der Darstellenden Geometrie*, in *Grundzüge der Mathematik*, Bd. II Kap. 11, S. 454-459 (Göttingen 1960).

Kleine Mitteilungen

Einige elementare kombinatorische Identitäten mit alternierenden Summen

1. Einleitung

Im Zentrum unserer Betrachtung steht die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} [x + (n-\nu)\, h]^m = \delta_{mn}\, h^n\, n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n;\quad h \in R;\quad x \in R]^{1)}, \tag{1}$$

der man ohne weiteres auch die Gestalten

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x + k\, h)^m = \delta_{mn}\, (-1)^n\, h^n\, n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n;\quad h \in R;\ x \in R], \tag{1'}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x - k\, h)^m = \delta_{mn}\, h^n\, n! \quad [0 \leqslant m \leqslant n;\quad h \in R;\ x \in R] \tag{1''}$$

geben kann[2]). Im Hinblick auf den bemerkenswerten Spezialfall

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)^n = n! \quad [n \geqslant 0] \tag{2}$$

---

[1]) R bezeichne die Menge der reellen Zahlen und δ_{mn} das KRONECKERsche Symbol. Für die ganze Betrachtung verabreden wir $0^0 = 1$.

[2]) Für Spezialfälle vergleiche zum Beispiel [3], Seite 97, Lemma 2.1; [7], (1) und (2); [8], S. 249, (17); [9], S. 496, zwischen (45) und (46); [10], S. 28, (4.14).

von (1) erhebt sich die Frage nach Beweisen, die dem besonders einfachen Charakter von (1) und (2) Rechnung tragen[3]). Für die in Abschnitt 2 auftretenden an und für sich interessanten Hilfsidentitäten (6) und (9) stellt sich die Frage abermals. Wir skizzieren nachfolgend einen Beweis, welcher (6), (9) und (1′) auf völlig elementare Weise aus dem Binomialsatz hervorgehen lässt; dabei werden wir auf ganz natürliche Weise zu einer Verallgemeinerung (10) von (1′) geführt.

2. Beweis

Aus dem Binomialsatz folgt direkt

$$r(0, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0n} \quad [n \geqslant 0] . \tag{3}$$

Mit den Bezeichnungen

$$(x)_0 := 1; \; (x)_l := x\,(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-l+1) \quad [l \geqslant 1] \; [x \in R] , \tag{4}$$

$$s(l, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k)_l \quad [l \geqslant 0; \; n \geqslant 0] \tag{5}$$

ergibt sich $s(l, n) = 0$ $[0 \leqslant n < l]$, da in (5) alle Summanden verschwinden. Für $0 \leqslant l \leqslant n$ beginnt die Summation in (5) effektiv bei $k = l$, und mit $\binom{n}{k} (k)_l = \binom{n-l}{k-l} (n)_l$ $[l \leqslant k \leqslant n]$ folgt $s(l, n) = (-1)^l (n)_l \, r(0, n-l)$, also insgesamt

$$s(l, n) = \delta_{ln} (-1)^n n! \quad [l \geqslant 0; \; n \geqslant 0]^{4)} . \tag{6}$$

Durch

$$x^m = \sum_{\mu \geqslant 0} t(m, \mu) \, (x)_\mu \quad [\textit{alle } x \in R] \quad [m \geqslant 0] \tag{7}$$

sind Zahlen $t(m, n)$ $[m \geqslant 0; n \geqslant 0]$ (in eindeutiger Weise) erklärt, und es gilt offensichtlich

$$t(m, n) = \delta_{mn} \quad [0 \leqslant m \leqslant n] , \tag{8}$$

so dass also m als obere Summationsgrenze in (7) auftritt. Nun ergibt sich die Gültigkeit von

$$r(m, n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = (-1)^n n! \, t(m, n) \quad [m \geqslant 0; \; n \geqslant 0]^{5)} \tag{9}$$

durch Einsetzen von (7) im mittleren Ausdruck von (9), Änderung der Summationsreihenfolge und Anwendung von (6). Ausgehend von der linken Seite von (1′) erhält man durch binomische Entwicklung von $(x + k\,h)^m$, Veränderung der Summationsreihenfolge und Anwendung von (9)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x + k\,h)^m = (-1)^n n! \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} t(\mu, n) \, h^\mu x^{m-\mu} \quad [m \geqslant 0; \; n \geqslant 0] . \tag{10}$$

Im Falle $0 \leqslant m \leqslant n$ resultiert durch Anwendung von (8) unsere Behauptung (1′), welche ihrerseits mit (1) und (1″) aequivalent ist.

3. Schlussbemerkung

Die $t(m, n)$ sind die STIRLINGschen Zahlen zweiter Art[6]). Bedenkt man, dass die mit $(-1)^n$ multiplizierte linke Seite von (10) das n-te der Funktion $f(x) = x^m$ zugeordnete

[3]) Bekannt sind unter anderem eine Herleitung von (1) auf Grund des Differenzenkalküls ([2], Seite 8), eine solche von (2) durch kombinatorische Interpretation ([10], S. 28) und eine solche von (1″) durch einen geeigneten Differentiationsprozess ([8], S. 249).

[4]) Für den Fall $1 \leqslant l < n$ vergleiche [4], Seite 44, (9d).

[5]) (9) hat in der Sequenz der Identitäten (3), (6), (9), (1) die Schlüsselstellung inne. – Theorem I in [6] kann mit (9) mühelos bestätigt werden.

[6]) Für eine ausführliche Darstellung der Theorie dieser Zahlen vergleiche etwa [2], Seite 168ff.

Differenzpolynom ist, so ist mit (10) ein wichtiges Vorkommen der $t(m, n)$ aufgewiesen. Schliesslich zeigt die aus (9) folgende Darstellung

$$t(m, n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)^m, \tag{11}$$

dass im Falle $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ die Anzahl der Zerlegungen einer m-elementigen Menge in n disjunkte nichtleere Teilmengen durch $t(m, n)$ gegeben ist[7]. JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. HADWIGER, *Gruppierung mit Nebenbedingungen*, Mitt. Verein. Schweiz. Vers.-Math. *43*, 113–122 (1943).

[2] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea New York 1947 (2nd edition).

[3] R. C. KAO and L. H. ZETTERBERG, *An Identity for the Sum of multinomial Coefficients*, Amer. Math. Monthly *64*, 96–100 (1957).

[4] I. KAPLANSKY, E. HEWITT, M. HALL JR., and R. FORTET, *Some Aspects of Analysis and Probability*. Part 2: M. HALL JR., *A Survey of Combinatorial Analysis*, Wiley New York 1958.

[5] F. KLEIN-BARMEN, *Über eine bei der Zerlegung einer endlichen Menge auftretende elementare zahlentheoretische Funktion*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. *62*, 130–134 (1960).

[6] M. LOTKIN, *The Partial Summation of Series by Matrix Methods*, Amer. Math. Monthly *64*, 643–647 (1957).

[7] W. NEF, *Über die Differenz zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion*, Z. Wahrsch.-lehre u. verw. Geb. *3*, 154–162 (1964).

[8] E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Teubner Leipzig–Berlin 1927 (2. Aufl.).

[9] J. RIORDAN, *Inverse Relations and Combinatorial Identities*, Amer. Math. Monthly *71*, 485–498 (1964).

[10] H. J. RYSER, *Combinatorial Mathematics*, Wiley New York 1963.

Ein Kreistangentensatz

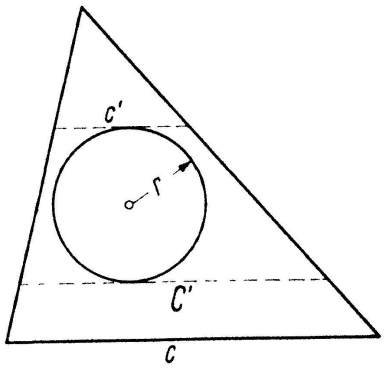
In der Lehre von den Transversalen und Dreieckskoordinaten sollte folgender Sachverhalt beachtet werden:

Tangentensatz: *An irgendeinen Kreis mit Radius r in der Ebene eines Dreiecks mit Seiten abc seien die seitenparallelen Tangentenstrecken $a'b'c'$ und $A'B'C'$ zwischen den Seiten oder ihren Verlängerungen gezeichnet. Dann gilt, mit ϱ = Inkreisradius,*

$$a'/a + b'/b + c'/c = 2 - r/\varrho \tag{1}$$

$$A'/a + B'/b + C'/c = 2 + r/\varrho\,. \tag{2}$$

Die Formel (1) mit $r = \varrho$ wurde, allerdings nur in einer speziellen Lage, in [1][1]) behandelt, während (2) dort vergessen wurde, da es in der speziellen Lage trivial ist: $1 + 1 + 1 = 2 + 1$. Für $r = 0$ wird (1) = (2), vgl. [2]. Der leichte Beweis des obigen Tangentensatzes beruht



[7]) Vergleiche [1], Seite 121, (27) und Fussnote S. 114, an welcher Stelle auf weitere Vorkommen der $t(m, n)$ hingewiesen wird; ferner [8], S. 283 und S. 170, (4a) und schliesslich [5].

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 112.

auf dem verallgemeinerten Transversalensatz von Euler-Gergonne und auf $a + b + c = 2s$, nämlich auf $H_a^{-1} + H_b^{-1} + H_c^{-1} = \varrho^{-1}$ (Höhen H_ν). Wie beim verallgemeinerten Satz von Euler-Gergonne darf der Kreismittelpunkt überall in der Ebene liegen, also auch auf dem Rande und ausserhalb des Dreiecks. Dem und der beliebigen Grösse von r wird durch a', b', c', A', B', $C' \gtreqless 0$ Rechnung getragen. I. PAASCHE, München

LITERATUR

[1] E. ROTHMUND, El. Math. *4*, 90 (1949), Aufgabe 43.
[2] I. PAASCHE, El. Math. *20*, 11 (1965), Bild 7 und S. 12 Ende.

Aufgaben

Aufgabe 508. Es bedeute $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. $p_1 < p_2 < \ldots$ sei eine unendliche Teilfolge P' der Folge P aller Primzahlen. $a_1 < a_2 < \ldots$ sei die Folge aller natürlichen Zahlen, in deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus P' vorkommen. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$$

immer irrational ist. Für $P' = P$ ist das die Aufgabe 308 [El. Math. *14*, 39 (1959)].

P. ERDÖS

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei $p_k = a_{f(k)}$ und $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Die Unmöglichkeit von $\sum 1/A_n = u/v$ folgt sofort aus

$$\liminf_{k=\infty} A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = 0. \tag{1}$$

Um (1) zu zeigen, setzen wir

$$A_{f(k)-1} \sum_{j=f(k)}^{\infty} 1/A_j = \sum_{u=1}^{\infty} \alpha_u, \tag{2}$$

wo

$$\alpha_u = A_{f(k)-1} \sum\nolimits_u 1/A_j. \tag{3}$$

In $\sum_u$ läuft a_j über diejenigen Elemente unserer Folge, für welche $p_k^u \leqq a_j < p_k^{u+1}$ gilt. Zunächst zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $k > k_0(\varepsilon)$

$$\alpha_3 + \alpha_4 + \cdots < \varepsilon. \tag{4}$$

Da der Beitrag jeder Primzahl p_i $(i < k)$ zu $A_{f(k)-1}$ kleiner als p_k ist, hat man

$$A_{f(k)-1} < p_k^{k-1}. \tag{5}$$

Nun ist die Anzahl der Summanden A_j^{-1} in α_u offenbar kleiner als p_k^{u+1}, und man erhält mit (5) also

$$\alpha_u < p_k^{k+u} \{a_1, a_2, \ldots, p_k^u\}^{-1}. \tag{6}$$

Ist $a_j \geqq p_k^u$, dann gilt

$$A_j \geqq \{a_1, a_2, \ldots, p_k^u\} > p_k^{(u-1)k}, \tag{7}$$

da jedes p_i einen Beitrag liefert, der grösser als p_k^{u-1} ist. Aus (6) und (7) ergibt sich $\alpha_u < p_k^{k+u-(u-1)k}$ und damit (4) für $k > k_0(\varepsilon)$.

Wegen (4) genügt für den Beweis von (1) der Nachweis von

$$\liminf_{k=\infty} (\alpha_1 + \alpha_2) = 0. \tag{8}$$