Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 3

Artikel: Über Netze aus regulären Polygonen in der hyperbolischen Geometrie
Autor: Zeitler, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25357

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Netze aus regulären Polygonen in der hyperbolischen Geometrie

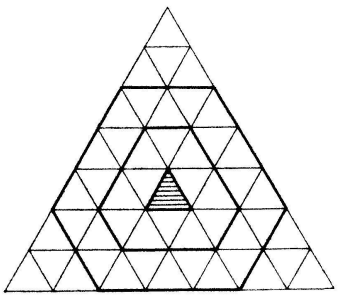
I. Ziel der Arbeit. Wir untersuchen reguläre N-Ecke mit den Winkeln $2\pi/m$ an den Ecken (dabei ist m eine natürliche Zahl).

Weil in der euklidischen Geometrie die Winkelsumme im N-Eck gleich $(N-2)\pi$ ist, muss gelten:

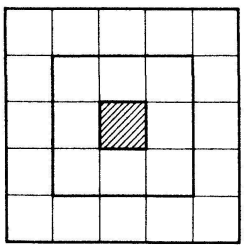
$$N\frac{2\pi}{m} = (N-2)\pi \quad \text{oder} \quad N\,m - 2\,N - 2\,m = 0\,. \tag{1}$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $N = 3$, $m = 6$; $N = 4$, $m = 4$; $N = 6$, $m = 3$. Von einem dieser drei regulären Polygone ausgehend, lässt sich durch Anlegen kongruenter Polygone, wie die Figuren 1, 2 und 3 zeigen, die ganze euklidische Ebene netzartig ausfüllen. Das Ausgangspolygon wird dabei von konzentrischen Gürteln umgeben. Bezeichnen wir die Fläche dieser Gürtel mit F_i $(i \geqq 1)$, so gilt in den drei Fällen:

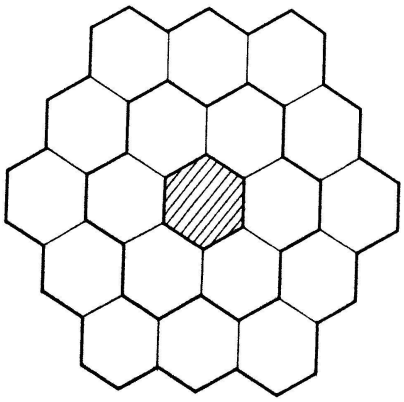
$$\lim_{i\to\infty}\frac{F_{i+1}}{F_i} = 1\,,\quad \lim_{i\to\infty}\frac{F_i}{F_1+F_2+\cdots+F_i} = 0\,. \tag{2a, b}$$



Figur 1
Dreiecksgitter in der euklidischen Ebene.



Figur 2
Vierecksgitter in der euklidischen Ebene.



Figur 3
Sechsecksgitter in der euklidischen Ebene.

F. KARTESZI [1][1]) hat einen der Grenzwerte (2) für Gitter aus kongruenten Dreiecken im Bereich der hyperbolischen Geometrie untersucht. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Gitter der hyperbolischen Ebene, die durch fortgesetztes Anlagern kongruenter N-Ecke entstehen. Dabei soll zunächst $N > 3$ sein. Weil die Winkelsumme im hyperbolischen N-Eck kleiner als $(N-2)\pi$ ist, müssen wir jetzt voraussetzen:

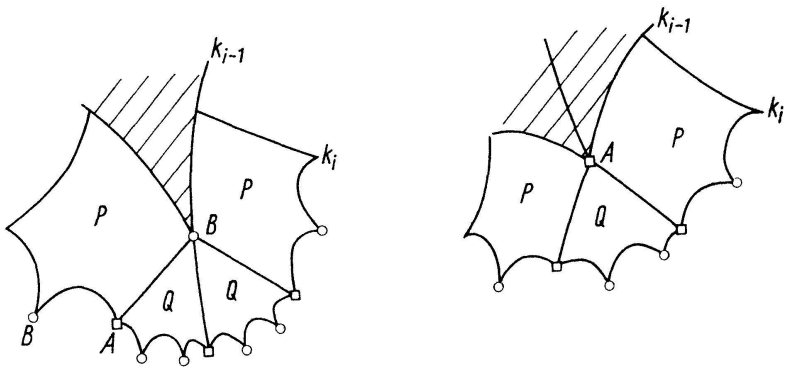
$$N \frac{2\pi}{m} < (N-2)\pi \quad \text{oder} \quad N m - 2N - 2m > 0 . \tag{3}$$

In jedem solchen Gitter ist das Ausgangspolygon von konzentrischen Gürteln umgeben. Wir ermitteln für die Gürtelflächen F_i wieder die Grenzwerte (2). Daneben ergeben sich noch ähnliche Grenzwerte für die Gesamtflächen innerhalb gewisser Begrenzungspolygone. Schliesslich betrachten wir noch entartete, asymptotische Gitter in der hyperbolischen Ebene.

II. Aufstellung einer Differenzengleichung. *1. Die konzentrischen Gürtel.*

Wir bezeichnen das Ausgangspolygon mit k_0 und allgemein die Begrenzungspolygone des i-ten Gürtels mit k_{i-1} und k_i. Der i-te Gürtel besteht aus allen zu k_0 kongruenten Fundamentalpolygonen, die mit k_{i-1} entweder eine ganze Seite oder aber wenigstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. Alle Seiten dieser Fundamentalpolygone, die mit k_{i-1} in keinem einzigen Punkt übereinstimmen, bilden das Begrenzungspolygon k_i. Damit ist der Begriff des Gürtels definiert.

Die Fundamentalpolygone des i-ten Gürtels können nur zwei verschiedene Lagen besitzen. Die P-Polygone haben mit k_{i-1} eine Seite, die Q-Polygone aber nur einen Eckpunkt gemeinsam (Figur 4).



Figur 4
Gitter in der hyperbolischen Ebene ($N = 5$, $m = 5$).

2. A-Punkte und B-Punkte.

Es gibt auf den Begrenzungspolygonen nur zwei Arten von Eckpunkten. Von den A-Punkten geht genau eine Seite eines Fundamentalpolygons durch einen Gürtel hindurch zum Begrenzungspolygon mit dem nächst niedrigeren Index. Bei B-Punkten jedoch gibt es eine solche Verbindungsstrecke nicht. B-Punkte existieren nur für $N > 3$. In den A-Punkten bildet das dazugehörige Begrenzungspolygon den Winkel $2\,(2\pi/m)$, in den B-Punkten dagegen den Winkel $2\pi/m$ (Figur 4).

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur, S. 62.

Wir bezeichnen die Anzahl der A-Punkte auf k_i mit x_i, die der B-Punkte mit y_i und die Anzahl der Fundamentalpolygone im i-ten Gürtel mit z_i. Damit ergibt sich für den i-ten Gürtel: Anzahl der P-Polygone = Anzahl der Seiten auf k_{i-1}. Also:

$$p_i = x_{i-1} + y_{i-1} .$$

Anzahl der Q-Polygone = $\frac{1}{N-2}$ [Anzahl der Seiten von $k_i - (N-3)$ mal Anzahl der P-Polygone].
Also:

$$q_i = \frac{x_i + y_i - (N-3)\, p_i}{N-2} .$$

Gesamtzahl der Fundamentalpolygone im i-ten Gürtel:

$$z_i = p_i + q_i = \frac{x_i + y_i + x_{i-1} + y_{i-1}}{N-2} . \tag{4}$$

Wir stellen weiter fest:
Zu jeder Seite auf k_{i-1} gehören $(N-4)$ B-Punkte auf k_i. Zu jedem A-Punkt auf k_{i-1} gehören $(N-3)$ $(m-4)$ B-Punkte und $(m-3)$ A-Punkte auf k_i. Zu jedem B-Punkt auf k_{i-1} gehören $(N-3)$ $(m-3)$ B-Punkte und $(m-2)$ A-Punkte auf k_i. Daher:

$$x_i = (m-3)\, x_{i-1} + (m-2)\, y_{i-1} , \tag{5}$$

$$y_i = x_{i-1}\,[N-4+(N-3)\,(m-4)] + y_{i-1}\,[N-4+(N-3)\,(m-3)] =$$

$$x_{i-1}\,[N\,m - 3\,N - 3\,m + 8] + y_{i-1}\,[N\,m - 2\,N - 3\,m + 5] . \tag{6}$$

3. Die Differenzengleichung.
Wir lösen die Gleichungen (5) und (6) zunächst nach x_{i-1} und y_{i-1} auf.

$$x_{i-1} = -\,y_i\,(m-2) + x_i\,(N\,m - 2\,N - 3\,m + 5) ,$$

$$y_{i-1} = y_i\,(m-3) - x_i\,(N\,m - 3\,N - 3\,m + 8) .$$

Durch Einsetzen in (4) ergibt sich dann:

$$z_i = x_i . \tag{7}$$

Wir suchen jetzt nach einer Differenzengleichung der Form: $z_i = \alpha\, z_{i-1} + \beta\, z_{i-2}$.
Durch zweimaliges Anwenden von (5) und (6) auf (4) wird zuerst die linke Seite und dann durch Anwenden von (7), (5) und (6) die rechte Seite dieser Gleichung als Funktion von x_{i-2} und y_{i-2} dargestellt. Koeffizientenvergleich liefert schliesslich:

$$\alpha = N\,m - 2\,N - 2\,m + 2 , \quad \beta = -1$$

Damit erhalten wir eine Differenzengleichung 2. Ordnung. Wir schreiben:

$$\boxed{z_{i+2} = (N\,m - 2\,N - 2\,m + 2)\, z_{i+1} - z_i} \quad (i \geqq 1) \tag{8}$$

Der Beweisgang dieses Abschnitts ist nur durchführbar unter der Voraussetzung $N > 3$. Setzt man jedoch in (8) $N = 3$, so ergibt sich überraschend die bei KARTESZI bewiesene Gleichung. Für die weiteren Untersuchungen der Differenzengleichung (8) können wir also annehmen $N \geqq 3$.

III. Auswertung der Differenzengleichung. Wir untersuchen zunächst die zu (8) gehörende charakteristische Gleichung.

$$\alpha^2 = (N\,m - 2\,N - 2\,m + 2)\,\alpha - 1\,.$$

Wir schreiben kürzer $\alpha^2 = p\,\alpha - 1$.

Diese Gleichung hat zwei verschiedene irrationale Lösungen:

$$\alpha_1 = \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4}\,. \tag{9}$$

Beide Lösungen sind positiv, keine ist Eins, und es gilt $\alpha_1 > \alpha_2$. Nach einem bekannten Satz [2] über lineare, homogene Differenzengleichungen hat die allgemeine Lösung von (8) das Aussehen:

$$z_i = C_1\,\alpha_1^i + C_2\,\alpha_2^i$$

Im vorliegenden Fall kann keine der beiden Konstanten C_1, C_2 verschwinden.

Damit erhalten wir:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{z_{i+1}}{z_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{C_1\,\alpha_1^{i+1} + C_2\,\alpha_2^{i+1}}{C_1\,\alpha_1^i + C_2\,\alpha_2^i} = \lim_{i\to\infty} \frac{C_1\,\alpha_1 + C_2\,\alpha_2\,(\alpha_2/\alpha_1)^i}{C_1 + C_2\,(\alpha_2/\alpha_1)^i}\,.$$

Dieser Grenzwert nimmt, wegen $0 < \alpha_2/\alpha_1 < 1$, den Wert α_1 an. Also gilt unabhängig von irgendwelchen Anfangsbedingungen für unsere Gürtelflächen:

$$\lim_{i\to\infty} \left(\frac{F_{i+1}}{F_i}\right) = \alpha_1\,.$$

Weiter ergibt sich:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{z_i}{z_1 + z_2 + \cdots + z_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{C_1\,\alpha_1^i + C_2\,\alpha_2^i}{C_1\,(\alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^i) + C_2\,(\alpha_2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_2^i)}\,.$$

Mit $\alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 \neq 1$ erhalten wir durch Summation im Nenner:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{(1-\alpha_1)\,(1-\alpha_2)(C_1\,\alpha_1^i + C_2\,\alpha_2^i)}{C_1\,(\alpha_1 - \alpha_1^{i+1})\,(1-\alpha_2) + C_2\,(1-\alpha_1)\,(\alpha_2 - \alpha_2^{i+1})}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \frac{(1-\alpha_1)\,(1-\alpha_2)\,(C_1 + C_2\,(\alpha_2/\alpha_1)^i)}{C_1\,(1-\alpha_2)\,(\alpha_1^{1-i} - \alpha_1) + C_2\,(1-\alpha_1)\,(\alpha_2\,\alpha_1^{-i} - \alpha_2\,(\alpha_2/\alpha_1)^i)}\,.$$

Dieser Grenzwert nimmt, wieder wegen $0 < \alpha_2/\alpha_1 < 1$, den Wert $(\alpha_1 - 1)/\alpha_1$ an. Also gilt, unabhängig von irgendwelchen Anfangsbedingungen, für unsere Gürtelflächen:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_i}{F_1 + F_2 + \cdots + F_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\,.$$

Bezeichnen wir weiter die Anzahl der Fundamentalpolygone innerhalb des Begrenzungspolygons k_{i-1} mit w_{i-1}, so gilt:

$$z_i = w_i - w_{i-1} \quad \text{für} \quad i \geqq 1 \quad \text{und} \quad w_0 = 1\,.$$

Durch Einsetzen in (8) erhalten wir eine Differenzengleichung 3. Ordnung:

$$\boxed{w_{i+2} = (1+p)\, w_{i+1} - (1+p)\, w_i + w_{i-1}} \qquad (i \geqq 1)$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung hat neben (9) noch die Lösung 1. Weil die drei Wurzeln voneinander verschieden sind, gilt nach dem bereits verwendeten Satz [2] über homogene, lineare Differenzengleichungen, für die allgemeine Lösung:

$$w_{i-1} = C_1\, \alpha_1^{i-1} + C_2\, \alpha_2^{i-1} + C_3\,.$$

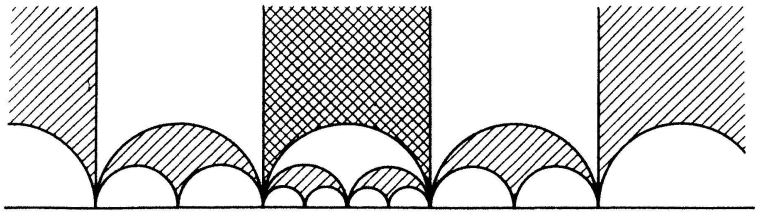
α_1 ist die grösste der drei Wurzeln, also folgt für das allgemeine Integral der Differenzengleichung:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{w_i}{w_{i-1}} = \alpha_1\,; \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{w_i}{w_0 + w_1 + \cdots + w_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\,.$$

Bezeichnen wir die Fläche innerhalb des Begrenzungspolygons k_{i-1} mit $\mathcal{G}_{i-1}$, so gilt speziell:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = \alpha_1\,, \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_i} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}\,. \qquad (10\text{ a, b})$$

IV. Asymptotische Gitter in der hyperbolischen Ebene. Ein hyperbolisches N-Eck heisst asymptotisch, wenn seine Ecken unendlich fern sind. Alle N-Ecke dieser Art sind regulär und zueinander kongruent. Die Winkel an den Ecken verschwinden ($m \to \infty$). Auch jetzt lässt sich die Ebene, von einem N-Eck ausgehend, gitterförmig ausfüllen. Figur 5 erläutert diesen Vorgang für $N = 3$ im speziellen Poincaré-Modell (das Ausgangspolygon und der zweite Gürtel wurden schraffiert). Für die Anzahl der Polygone im i-ten Gürtel erhalten wir sofort $z_i = N\,(N-1)^{i-1}$.



Figur 5
Asymptotisches Dreiecksgitter in der hyperbolischen Ebene.

Damit ergibt sich weiter:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F_{i+1}}{F_i} = N - 1\,, \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{F_i}{F_1 + F_2 + \cdots + F_i} = \frac{N-2}{N-1}\,.$$

Die Differenzengleichung lautet jetzt:

$$\boxed{z_{i+1} = (N-1)\, z_i} \qquad (i \geqq 1)$$

Setzen wir wie im letzten Abschnitt wieder $z_i = w_i - w_{i-1}$, so erhalten wir:

$$\boxed{w_{i+1} = N\, w_i - (N-1)\, w_{i-1}} \qquad (i \geqq 1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet $w_{i-1} = C_1 + C_2 (N-1)^{i-1}$. Als Partikulärintegral für unseren Spezialfall ergibt sich:

$$w_{i-1} = \frac{N(N-1)^{i-1} - 2}{N-2}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = N-1\,; \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_i} = \frac{N-2}{N-1}.$$

V. Der euklidische Fall. Die Untersuchung bei KARTESZI ($N = 3$) und diejenige des Abschnitts II ($N > 3$) gelten auch in der euklidischen Geometrie. Es muss allerdings die Bedingung (1) erfüllt sein. Damit vereinfacht sich (8) zu:

$$\boxed{z_{i+2} = 2\, z_{i+1} - z_i} \qquad (i \geqq 1)$$

Die Diskriminante der zugehörigen charakteristischen Gleichung verschwindet, es ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung hat, nach einem Satz über homogene, lineare Differenzengleichungen [2] die Form $z_i = C_1 + C_2\, i$. Für das Drei-, Vier- und Sechsecksgitter erhalten wir die Partikulärintegrale: $z_i = 12\, i$, $z_i = 8\, i$, $z_i = 6\, i$. Damit erkennen wir sofort die Richtigkeit von (2). Mit $z_i = w_i - w_{i-1}$ ergibt sich weiter:

$$\boxed{w_{i+2} = 3\, w_{i+1} - 3\, w_i + w_{i-1}} \qquad (i \geqq 1)$$

Die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung fallen wieder zusammen und haben den Wert 1. Das allgemeine Integral der Differenzengleichung lautet nach [2]:

$$w_{i-1} = C_1 + C_2 (i-1) + C_3 (i-1)^2.$$

Für das Drei-, Vier- und Sechsecksgitter ergeben sich die Partikulärintegrale:

$$w_{i-1} = 1 + 6\,(i-1) + 6\,(i-1)^2\,; \quad w_{i-1} = 1 + 4\,(i-1) + 4\,(i-1)^2\,;$$

$$w_{i-1} = 1 + 3\,(i-1) + 3\,(i-1)^2.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_{i-1}} = 1\,; \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{\mathcal{G}_i}{\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_i} = 0.$$

VI. Zusammenfassung und Ausblick. In der vorliegenden Arbeit ging es zunächst um die Untersuchung von Gittern aus nicht entarteten, regulären N-Ecken in der hyperbolischen Ebene. Dann wurden asymptotische N-Ecke und schliesslich der euklidische Grenzfall behandelt. Dabei stellten wir gewisse Differenzengleichungen auf. Unter Verwendung der Wurzeln der entsprechenden charakteristischen Gleichungen konnten für die einzelnen Fälle die Grenzwerte (2a, b) und (10a, b) berechnet werden. Hat der Ausdruck (2a) für eine Folge positiver Zahlen F_i einen Grenzwert $\alpha \geqq 1$, so lässt sich ganz allgemein zeigen, dass dann auch (10a) diesen Wert besitzt und weiter, dass (2b) und (10b) den Wert $(\alpha - 1)/\alpha$ haben müssen.

Es wäre nun interessant, die ganze Problematik in drei- und mehrdimensionale Räume zu übertragen.

Nachdem die vorliegende Arbeit geschrieben war, teilte mir Herr Prof. F. KARTESZI mit, dass sein Assistent J. HORVATH die Gleichung (8) auf ähnlichem Wege entwickelt hat [3].

H. ZEITLER, Weiden/Deutschland

LITERATUR

[1] F. KARTESZI, *Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene*, Publ. Math. Debrecen *5*, 142–146 (1957).
[2] H. MESCHKOWSKI, *Differenzengleichungen*, Göttingen (1959), 94–98.
[3] J. HORVATH, *Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene*, Ann. Sect. Math. Budapest *7*, 49–53 (1964).

Zur Induktion im Kontinuum

Unter Kontinuum verstehen wir eine dicht geordnete Menge A ohne erstes und letztes Glied. Das Prinzip der Induktion im Kontinuum kann man so formulieren (siehe [2]):

Es sei S eine Eigenschaft. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(i) Es existiert ein solches $\alpha \in A$, dass jedes $\lambda \in A$, $\lambda < \alpha$ die Eigenschaft S hat.

(ii) Wenn alle $\lambda \in A$, $\lambda < \beta$ $(\beta \in A)$ die Eigenschaft S haben, dann existiert ein solches $\gamma \in A$, $\beta < \gamma$, dass jedes $\lambda \in A$, $\lambda < \gamma$ die Eigenschaft S hat.

Behauptung: Alle Elemente des Kontinuums A haben die Eigenschaft S.

In der Arbeit [2] ist bewiesen, dass das Prinzip der Induktion im Kontinuum dasselbe bedeutet wie das Dedekindsche Axiom über die Nichtexistenz von Lücken im Kontinuum. In den Arbeiten [1] und [2] gebraucht man das Prinzip der Induktion im Kontinuum zum Beweis einiger grundlegender Sätze der Analysis. In diesem Artikel geben wir mit Hilfe des Prinzips der Induktion in $(-\infty, +\infty)$ einen neuen Beweis des folgenden grundlegenden Satzes der Analysis, der von E. HEINE stammt.

Satz. Es sei f eine auf dem endlichen, abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige reelle Funktion. Dann ist f gleichmässig stetig auf $\langle a, b\rangle$.

Beweis. f erfülle die Voraussetzungen des Satzes. Wir setzen noch $f(x) = f(a)$ für $x < a$ und $f(x) = f(b)$ für $x > b$. Dann ist f für alle $x \in (-\infty, +\infty)$ definiert und stetig im ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir sagen, dass die Zahl $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ hat, wenn zwei reelle Zahlen $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda) > 0$, $\eta = \eta(\varepsilon, \lambda) > 0$ existieren, so dass für jedes Zahlenpaar $x', x'' \in (-\infty, \lambda + \eta)$, für das $|x' - x''| < \delta$ gilt, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist. Wir zeigen dann mit Hilfe des Prinzips der Induktion in $(-\infty, +\infty)$, dass alle reellen Zahlen die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ haben.

Es sei also ε eine beliebige positive reelle Zahl und $S(\varepsilon)$ habe die obige Bedeutung. Wenn $\alpha < a$ ist, dann hat offenbar jede Zahl $\lambda < \alpha$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$, also ist für $S = S(\varepsilon)$ die Voraussetzung (i) des Prinzips der Induktion erfüllt.

Wir zeigen jetzt, dass auch die Voraussetzung (ii) für $S = S(\varepsilon)$ erfüllt ist. Es sei $\beta \in (-\infty, +\infty)$, und es habe jedes $\lambda < \beta$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$. Wenn $\beta < a$ ist, setzen wir $\gamma = a$, für $\beta > b$ setzen wir $\gamma = \beta + 1$, dann ist die Voraussetzung (ii) sichtlich erfüllt. Es sei endlich $a \leqq \beta \leqq b$. Wir beschränken uns auf den Fall