Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Autor(en): **Spilker, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25350

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Sei N die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Es bezeichne α die Additionsabbildung

$$\alpha\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a + b$$

und μ die Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a\, b\,.$$

Eine bijektive Abbildung $\pi\colon N \times N \to N$ heisst Peano-Abbildung. Mit diesen Bezeichnungen lautet ein Problem von ULAM ([3], Seite 32): Gibt es eine Peano-Abbildung π, so dass $\mu\, \pi^{-1}\, \alpha = \alpha\, \pi^{-1}\, \mu$ auf $N \times N$ gilt? Diese Frage ist von GAO [1] und KOPFERMANN [2] negativ beantwortet worden. Es stellt sich deshalb das folgende Problem: Existieren zwei Peano-Abbildungen π und ϱ mit der Eigenschaft $\mu\, \pi^{-1}\, \alpha = \alpha\, \varrho^{-1}\, \mu$? Allgemeiner kann man fragen, in welchem Sinne Addition und Multiplikation vertauschbar oder nicht vertauschbar sind. Ein Resultat in dieser Richtung enthält der

Satz: 1. *Es gibt keine Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ mit $\sigma^{-1}\, \mu\, \pi^{-1}\, \alpha = \tau^{-1}\, \alpha\, \varrho^{-1}\, \mu$ auf $N \times N$.*

2. *Es gibt Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ mit $\mu\, \pi^{-1}\, \alpha\, \sigma^{-1} = \alpha\, \varrho^{-1}\, \mu\, \tau^{-1}$ auf N.*

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, nehme man an, es gäbe Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ, für die das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[r, "\mu"] & N \arrow[dr, "\sigma^{-1}"] & \\
N \times N \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"'] & & & & N \times N \\
 & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[ur, "\tau^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Offenbar ist $\alpha^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ leer, was $\pi\, \mu^{-1}\, \sigma\, \tau^{-1}(1) = \{1\}$ zur Folge hat, und $\mu^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ einelementig, weshalb $\sigma\, \tau^{-1}(1) = \{1\}$ gilt. Ferner enthält $\pi\, \mu^{-1}\, \sigma\, \tau^{-1}(2)$ zwei verschiedene Elemente $a > 1$, $b > 1$. Weil $\varrho\, \alpha^{-1}(2)$ einelementig ist, folgt $\mu\, (1, a - 1) = \mu\, (1, b - 1)$ und daraus der Widerspruch $a = b$.

Im nachfolgenden zweiten Teil des Beweises werden induktiv Peano-Abbildungen π, ϱ sowie eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich konstruiert, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[dr, "\mu"] & \\
N \times N \arrow[r, "\mu"'] & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[r, "\alpha"'] & N
\end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Weil am rechten Ende des Diagramms jede natürliche Zahl $n > 1$ auftreten kann, definiere man $\pi(1, 1) := 1$ und weiter

$$\pi(1, 2) := 2,\ \pi(2, 1) := 3,$$

$$\varrho(1, 1) := 4,$$

$$\varphi(1, 1) := (1, 4),\ \varphi(1, 2) := (2, 2),\ \varphi(2, 1) := (4,1)\,.$$

Dann kommutiert die Figur für alle Urbilder von $n = 2$, nämlich für (1, 1), (1, 2), (2, 1). Für ein $n > 2$ seien Injektionen π von $\mu^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N und ϱ von $\alpha^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N sowie eine Bijektion φ von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ so definiert, dass das Diagramm kommutativ ist. Hat dann n die Primfaktorzerlegung $n = \prod_\nu p_\nu^{q_\nu}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_ν, so existieren genau $m_n := \Pi(q_\nu + 1)$ formal verschiedene Zerlegungen $n = a_\nu b_\nu$ in natürliche Zahlen a_ν, b_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant m_n)$. Wenn $\mathsf{N} - \varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{c_1, c_2, \ldots\}$ mit $c_1 < c_2 < \ldots$ ist, dann definiere man $\varrho(1, n-1) := c_1$, $\varrho(2, n-2) := c_2, \ldots$, $\varrho(n-2, 2) := c_{n-2}$.

Ferner setze man $\pi(a_1, b_1) := d_1, \ldots, \pi(a_{m_n-1}, b_{m_n-1}) := d_{m_n-1}$, sofern $\mathsf{N} - \pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{d_1, d_2, \ldots\}$ mit $d_1 < d_2 < \ldots$ gilt. Sodann wähle man $\pi(a_{m_n}, b_{m_n})$ aus $\mathsf{N} - (\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{d_1, \ldots, d_{m_n-1}\})$ so gross, dass

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n \geqslant m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + 2$$

gilt. Da es beliebig grosse natürliche Zahlen l gibt, für die m_l einen vorgegebenen Wert $\geqslant 2$ hat, kann man eine Zahl $\varrho(n-1, 1)$ aus $\mathsf{N} - (\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{c_1, \ldots, c_{n-2}\})$ mit der Eigenschaft

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n = m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + m_{\varrho(n-1, 1)}$$

bestimmen. Dann haben die Mengen $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}(n)$ und $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}(n)$ gleiche Elementezahl, und φ lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n\}$. Auf diese Weise sind rekursiv Peano-Abbildungen π, ϱ und eine Bijektion φ von $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ auf sich mit der Eigenschaft $\mu\pi^{-1}\alpha = \alpha\varrho^{-1}\mu\varphi$ konstruiert. Nimmt man für τ schliesslich eine beliebige Peano-Abbildung und setzt $\sigma := \tau\varphi$, dann gilt $\mu\pi^{-1}\alpha\sigma^{-1} = \alpha\varrho^{-1}\mu\tau^{-1}$, womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

LITERATUR

[1] H. GAO, *Solution to a Problem of S. Ulam*, Sci. Sinica *13*, 1005–1006 (1964).
[2] K. KOPFERMANN, *Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen*, Math.-Phys. Semesterber. *10*, 273–275 (1964).
[3] S. ULAM, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.

Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

1. Definitionen und Bezeichnungen

Ausgehend von der Tatsache, dass jede Permutation φ abgesehen von der Reihenfolge auf genau eine Weise in elementfremde Zyklen zerfällt[1]), ordnen wir φ ihre *Zyklenzahl* $z(\varphi)$ zu; hierbei sind die eingliedrigen Zyklen mitzuzählen. Eine Permutation φ von n Elementen mit $z(\varphi) = k$ nennen wir fortan eine (n, k)-*Permutation*, und es bezeichne $p(n, k)$ deren Anzahl. Die $(n, 1)$-Permutationen werden auch «zyklisch» genannt, und im Falle $n \geqslant 2$ heissen die $(n, n-1)$-Permutationen *Transpositionen*.

Es sollen in dieser Note die Zahlen $p(n, k)$ bestimmt und eine durch sie auf natürliche Weise induzierte Klassifikation der Permutationen betrachtet werden. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des nichtentarteten Falles $1 \leqslant k \leqslant n$.

[1]) Vergleiche zum Beispiel [1], p. 10 oder [3], p. 28.