Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt

Autor(en): **Stachel, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 2

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25354

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aus (1), (8), (10) folgt

$$m_{n+1}\, r \leqslant l_n(r) \text{ für } r \geqslant a_{n+1}\,,$$

und aus (5), (7) folgt

$$f(x, y) \leqslant m_{n+1} \sqrt{x^2 + y^2}\,, \text{ wenn } \sqrt{x^2 + y^2} < a_n\,;$$

somit gilt

$$f(x, y) \leqslant l_n\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \text{ wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < a_n\,. \tag{12}$$

IV. Nun setzen wir

$$k_2(x, y) = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } x = y = 0\,; \\ l_n\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), & \text{wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < a_n \ (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{cases}$$

Wegen (7), (8), (9) ist hierdurch eine Funktion k_2 mit dem Definitionsbereich

$$K_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < a_1 = r_2\}$$

gegeben, und K_2 ist (nach unserer Annahme über D) in D enthalten. Offenbar ist $k_2(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, und auf Grund von (12) gilt

$$f(x, y) \leqslant k_2(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in K_2\,.$$

Weiter ergibt sich mit (10) sofort die Stetigkeit von k_2 und hieraus mit (11) die Konvexität von unten. Schliesslich überzeugt man sich mit Hilfe von (2) und (8) leicht davon, dass k_2 glatt ist, das heisst dass es keine von der xy-Ebene verschiedene Stützebene an k_2 in (0, 0, 0) gibt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

ARNOLD KIRSCH, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

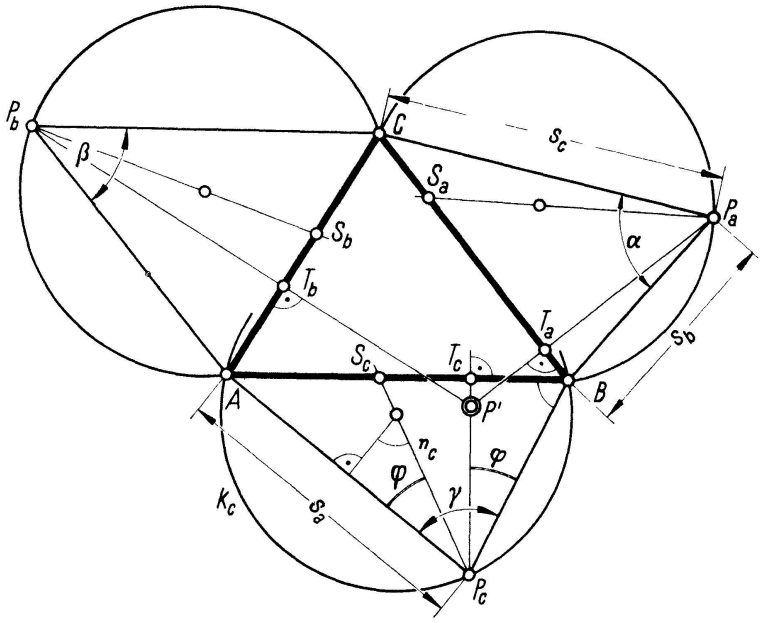
[1] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, 2. Aufl., Berlin 1956.
[2] T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.
[3] M. FRÉCHET, *Sur diverses définitions de la différentiabilité*, L'Ens. math. X, 177–228 (1964).
[4] A. KIRSCH, *Eine geometrische Charakterisierung der «Differenzierbarkeit» einer Funktion*, Math.-Phys. Semesterberichte VII, 96–100 (1960).

Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt

Als *räumlichen Rückwärtsschnitt* bezeichnet man die Aufgabe, zu einem vorgegebenen Dreieck $\triangle$ mit den Ecken A, B, C jenen Raumpunkt P zu bestimmen, aus welchem die Dreiecksseiten unter vorgegebenen Winkeln α, β, γ erscheinen. Der Ort aller Punkte, aus welchen zwei feste Punkte A, B unter konstantem Winkel γ gesehen werden, besteht in der Ebene nach dem Peripheriewinkelsatz aus zwei Kreisen über der Sehne AB. Rotation dieser Kreise um $[AB]$ ergibt einen Torus als entsprechende

Ortsfläche im Raum. Das Problem des räumlichen Rückwärtsschnittes führt somit auf die Bestimmung der gemeinsamen Punkte P dreier Torusflächen.

Es kann dabei der Fall eintreten, dass in einem Lösungspunkt P die Tangentialebenen an die drei Torusflächen eine Gerade g gemein haben. Dann berühren die Schnittkurven je zweier Torusflächen die Gerade g in P; also ist P auf g differentiell verschiebbar. Den Ort solcher verschiebbaren Punkte bezeichnet man als *gefährliche Fläche* dieses Problems.



Figur 1

Als erster hat S. FINSTERWALDER[1]) mit Hilfe kinematischer Überlegungen und unter Verwendung unendlich kleiner Grössen erster und zweiter Ordnung gezeigt, dass der gefährliche Ort ein Drehzylinder ist, der den Umkreis von $\triangle$ als Normalschnitt enthält. Ein exakter kinematischer Beweis, in welchem jedoch die Kenntnis von Nullsystemen vorausgesetzt wird, stammt von W. WUNDERLICH[2]). In der nun folgenden Bestimmung werden nur elementare Mittel verwendet:

Angenommen, P sei ein Lösungspunkt des räumlichen Rückwärtsschnittes. Sein Normalriss auf die als Zeichenebene verwendete Dreiecksebene ε sei P'. Durch Drehung von P um die Dreiecksseiten $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ nach ε erhält man die Punkte P_c, P_a, P_b. Dabei treten in ε als Abstände $P_aB = P_cB, \ldots$ die Längen $s_b, \ldots$ der Kanten $PB, \ldots$ auf (siehe Figur 1).

Lässt man den Umkreis k_c von A, B, P_c um die Seite $[AB]$ rotieren, so erhält man eine der drei oben genannten Torusflächen durch den Punkt P. Die Flächennormale an diesen Torus in P ist zugleich die Kreisnormale zum Umkreis von A, B, P. Deren Schnittpunkt S_c mit der Geraden $[AB]$, zugleich der Spurpunkt in ε, bleibt bei der Drehung der Ebene $[ABP]$ nach ε fest, liegt also auf der Normalen n_c an den Umkreis k_c in P_c. Ebenso findet man die zwei weiteren Spurpunkte S_a, S_b.

---

[1]) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung VI, 2 (1899).

[2]) Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung LIII, 2 (1943). In dieser Abhandlung werden auch ausführlich die Richtungen der differentiellen Verschiebungen in Punkten der gefährlichen Fläche behandelt.

Soll nun P auf der gefährlichen Fläche liegen, so gehen die drei Torustangentialebenen in P durch eine Gerade. Die drei Flächennormalen liegen daher in einer Ebene und ihre Spurpunkte S_a, S_b, S_c liegen auf einer Geraden in ε und umgekehrt.

Nach dem *Satz von Menelaos* sind die auf dem Dreieck ABC gelegenen Punkte S_a, S_b, S_c dann und nur dann kollinear, wenn die Teilverhältnisse[3]) die Gleichung $(ABS_c)\,(BCS_a)\,(CAS_b) = 1$ erfüllen.

In den Dreiecken AP_cS_c und S_cP_cB in Figur 1 gilt nach dem Sinussatz:

$$A\,S_c\colon \sin\sphericalangle A\,P_c\,S_c = A\,P_c\colon \sin\sphericalangle A\,S_c\,P_c$$

$$B\,S_c\colon \sin\sphericalangle B\,P_c\,S_c = B\,P_c\colon \sin\sphericalangle B\,S_c\,P_c$$

Bezeichnet man $\sphericalangle AP_cS_c$ mit φ, $\sphericalangle BP_cS_c$ mit $\gamma - \varphi$ und beachtet man, dass $\sin\sphericalangle AS_cP_c = \sin\sphericalangle BS_cP_c$, so folgt für den absoluten Betrag des Teilverhältnisses (ABS_c) der Wert

$$|\,(A\,B\,S_c)\,| = \left|\frac{AS_c}{BS_c}\right| = \left|\frac{s_a \sin\varphi}{s_b \sin(\gamma - \varphi)}\right| \tag{1}$$

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass S_c nicht mit A oder B zusammenfällt.

Wendet man den Satz über Zentriwinkel auf den Kreis k_c über der Sehne AP_c an, so findet man die Winkelgleichheiten $\sphericalangle AP_cS_c = \sphericalangle P'P_cB = \varphi$, $\sphericalangle BP_cS_c = \sphericalangle P'P_cA = \gamma - \varphi$. Bezeichnet T_c den Fusspunkt des Lotes aus P' auf die Seite $[AB]$, so gilt für den Absolutbetrag des Teilverhältnisses (ABT_c) analog zu (1)

$$|\,(A\,B\,T_c)\,| = \left|\frac{AT_c}{BT_c}\right| = \left|\frac{s_a \sin(\gamma - \varphi)}{s_b \sin\varphi}\right| \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Beziehung

$$|\,(A\,B\,S_c)\,| = \frac{s_a^2}{s_b^2}\,\frac{1}{|\,(ABT_c)\,|} \tag{3}$$

Liegt T_c ausserhalb der Strecke AB, so ist entweder $\sphericalangle ABP_c$ oder $\sphericalangle BAP_c$ grösser als 90°. Dann aber muss der Umkreismittelpunkt ausserhalb des Dreiecks ABP_c und somit S_c ausserhalb der Strecke AB liegen, und umgekehrt. Es liegen also T_c und S_c immer zugleich ausserhalb oder innerhalb der Strecke AB. Daher haben die Teilverhältnisse (ABS_c) und (ABT_c) das gleiche Vorzeichen; die Absolutstriche in (3) können weggelassen werden.

Nach zyklischer Vertauschung von (3) erhält man

$$(A\,B\,S_c)\,(B\,C\,S_a)\,(C\,A\,S_b) = [(A\,B\,T_c)\,(B\,C\,T_a)\,(C\,A\,T_b)]^{-1} \tag{4}$$

Eine Deutung dieser Gleichung mit Hilfe des Satzes von Menelaos ergibt: *Dann und nur dann liegen die Spurpunkte S_a, S_b, S_c der Torusnormalen auf einer Geraden, wenn T_a, T_b, T_c, die Fusspunkte der Lote aus P' auf die Seiten des Dreiecks $\triangle$, auf einer Geraden liegen.*

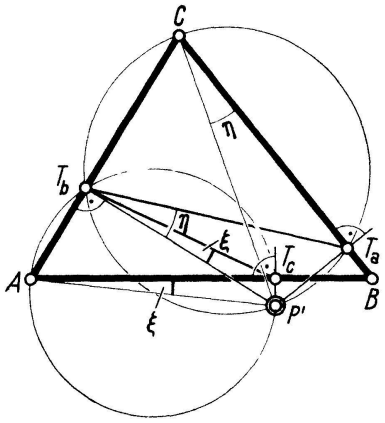
Die Frage, wann nun T_a, T_b, T_c kollinear liegen, beantwortet der *Satz von* WALLACE[4]), welcher der Vollständigkeit halber hier abgeleitet wird:

---

[3]) Definition: $(ABS_c) = AS_c/BS_c$ unter Beachtung der Richtungen der Strecken AS_c und BS_c.

[4]) Enz. d. Math. Wiss. III AB10, Nr. 11, Nr. 14. Vgl. auch Fussnote 2.

Die Punkte P', A, T_b, T_c und P', C, T_a, T_b liegen nach dem Satz von Thales je auf einem Kreis (siehe Figur 2). Bei allgemeiner Wahl von P' ergeben sich aus dem Peripheriewinkelsatz folgende gleiche Winkel: $\xi = \sphericalangle P'AB = \sphericalangle P'T_bT_c$, $\eta =$



Figur 2

$\sphericalangle P'CB = \sphericalangle P'T_bT_a$. Also unterscheiden sich ξ und η um $\sphericalangle T_aT_bT_c$. Genau dann, wenn T_a, T_b, T_c auf einer Geraden liegen, müssen ξ und η gleich sein, daher die vier Punkte A, B, C, P' auf einem Kreis liegen. Also: *Dann und nur dann liegen T_a, T_b, T_c auf einer Geraden, wenn P' auf den Umkreis des Dreiecks $\triangle$ fällt.*

In Verbindung mit der Deutung von (4) erhält man das Ergebnis: *Die gefährliche Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt ist jener Drehzylinder, der die Ebene ε nach dem Umkreis des Dreiecks $\triangle$ schneidet.*

H. STACHEL, Graz

On a Diophantine Equation

A. SCHINZEL and W. SIERPIŃSKI [2][1]) have recently showed that all solutions of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left(\left(\frac{y - x}{2}\right)^2 - 1\right)^2 \tag{1}$$

in natural numbers x, y, $x < y$ are of the form $x = x_n$, $y = x_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, where $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_{n+2} = 6\,x_{n+1} - x_n$. Equation (1) is a special case of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \tag{2}$$

whose all solutions are still unknown (cf. [2]–[5]). Moreover, the only known solution of (2) which is not a solution of (1) is $x = 4$, $y = 31$, $z = 11$ ([5]; cf. [2], [3]).

The purpose of this note is to give all solutions in natural numbers t, x, y of the equation

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) = \left(\left(\frac{y - x}{2}\right)^2 - t^2\right)^2. \tag{3}$$

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 38.