Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 23 (1968)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Einfacher Beweis des Wilsonschen Satzes

Die Wilsonsche Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, wobei p Primzahl ist, gestattet einen Beweis, der nur die einfachsten Tatsachen über Kongruenzen benutzt und ohne weitere Hilfssätze, wie etwa den Fermatschen Satz, auskommt.

Es sei p eine Primzahl und $a_i = (p-1)!/i$, $1 \leqq i \leqq p-1$. Die a_i sind nicht durch p teilbar und paarweise inkongruent mod p, da aus $a_x \equiv a_y \pmod{p}$ durch Division $x \equiv y \pmod{p}$ folgen würde. Aber auch die $p-1$ Zahlen a_1, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$, ... $a_1 - a_{p-1}$ sind nicht durch p teilbar, denn aus $a_1 - a_x \equiv 0 \pmod{p}$ würde sich $a_1 \equiv a_x \pmod{p}$ ergeben. Auch diese Zahlen sind paarweise inkongruent mod p, denn aus $a_1 \equiv a_1 - a_x \pmod{p}$ würde $a_x \equiv 0 \pmod{p}$ und aus $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y \pmod{p}$ würde $a_x \equiv a_y \pmod{p}$ folgen.

Das Produkt von $p-1$ paarweise inkongruenten Zahlen, die nicht durch p teilbar sind, ist $\equiv (p-1)! \pmod{p}$. Somit folgt aus

$$a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1}) = a_1 a_2 (2-1) a_3 (3-1) \ldots a_{p-1} (p-1-1)$$

$$= (a_1 a_2 a_3 \ldots a_{p-1}) a_{p-1}$$

sofort $$(p-1)! \equiv (p-1)!\, a_{p-1} \pmod{p}$$

oder $$(p-2)! = a_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}\,.$$

F. Stöwener, Weinheim DBR

Aufgaben

Aufgabe 560. Von den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte k_1, k_2 in einer Ebene seien zwei reell (U, V). Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene geht ein Kegelschnitt k des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ hindurch. Die Geraden $UP = a$ und $VP = b$ schneiden k_1 in A_1, B_1 und k_2 in A_2, B_2.

Man beweise: Der Schnittpunkt T der Geraden A_1B_1 und A_2B_2 ist ein Punkt der Tangente t im Punkt P an den Kegelschnitt k. T liegt auf einem zerfallenden Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$.

H. Günther, Dresden

1st Solution: Since two of the points of intersection of k_1 and k_2 are conjugate complex points, we may take these as absolute points of a Euclidean plane, and then k_1, k_2 and k are circles. It is now easy to show by using the usual angle properties of a circle that A_1B_1, A_2B_2 and the tangent to k at P are parallel. This is equivalent, in the Euclidean plane, to the two projective results required.

E. J. F. Primrose, University of Leicester, England

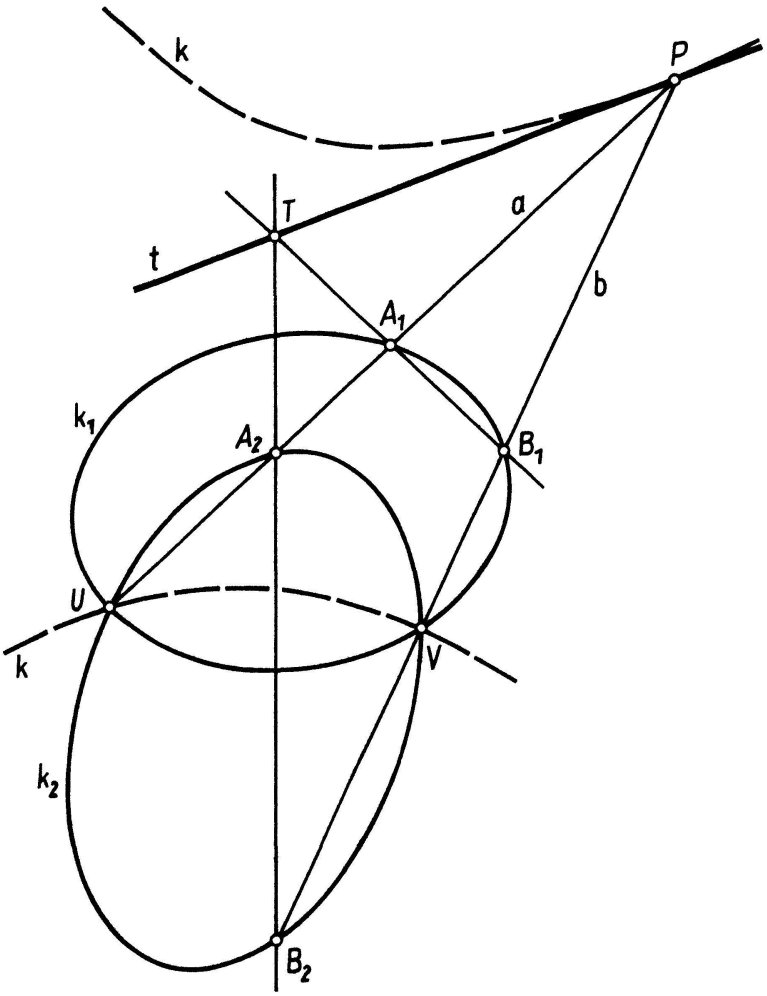
2. Lösung: Die Gleichungen der Geraden UV, PU, PV, A_1B_1, A_2B_2 seien (in gleicher Reihenfolge): $s = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$. Die Gleichungen von k_1 und k_2 sind (bei geeigneter Normierung von g_1 und g_2) $s g_1 + u v = 0$ und $s g_2 + u v = 0$. Dann ist $u v (1 + \lambda) + s (g_1 + \lambda g_2) = 0$ bei unbestimmtem λ die Büschelgleichung. Für $\lambda = \lambda_0$ stelle sie k dar. Dann ist $g_1 + \lambda_0 g_2 = 0$ die Gleichung von t. Der Schnittpunkt von A_1B_1 und A_2B_2 (d.h. $g_1 = 0$, $g_2 = 0$) liegt also auch auf t, sowie auf dem zerfallenden Kegelschnitt $s (g_1 - g_2) = 0$ des Büschels.

C. Bindschedler, Küsnacht

3. Lösung (des Aufgabenstellers): Durch die Kegelschnitte des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$ werden die Punkte der Geraden a den Punkten der Geraden b perspektiv zugeordnet (z.B. $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2 \ldots$, der Kegelschnitt k des Büschels, welcher durch P hindurchgeht, ordnet diesem Punkt denselben Punkt P zu). Das Zentrum der Perspektivität ist der Schnittpunkt T der Geraden A_1B_1 und A_2B_2. Das Punktepaar, in welchem die Gerade TP den Kegelschnitt k schneidet, ist im Punkt P zusammengerückt, d.h. TP ist Tangente an k. Jener zerfallende Kegelschnitt des Büschels $\lambda k_1 + \mu k_2$, welcher die Gerade UV als

Teil enthält, schneidet a und b auch in zugeordneten Punkten A_l, B_l, deren Verbindungsgerade also durch T hindurchgeht und zusammen mit UV einen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels bildet.

Weitere Lösungen sandten J. FEHÉR (Pecs, Ungarn), G. GEISE (Dresden), K. GRÜN (Linz), L. KIEFFER (Luxemburg).



Aufgabe 561. $N_1 = 1 < N_2 < N_3 < \ldots$ seien die der Grösse nach geordneten natürlichen Zahlen N, die durch den Quotienten

$$(x^2 - 6\,x\,y + y^2) : (x^2 - 10\,x\,y + y^2)$$

mit ganzen, nicht gleichzeitig verschwindenden x, y dargestellt werden (vgl. Aufgabe 513, El. Math. *21*, 136–137 (1966)). Man zeige, dass jedes N_i durch die eigentlich primitive quadratische Form

$$(14,\ 20,\ 7) = 14\,x^2 + 20\,x\,y + 7\,y^2$$

darstellbar ist, wobei $x^2 = 2\,N_{i-1} - 1$ und $y^2 = 3\,N_{i-1} - 2$.

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Solution: The equation

$$x^2 - 6\,x\,y + y^2 = N\,(x^2 - 10\,x\,y + y^2)$$

or

$$(N - 1)\,x^2 - 2\,(5\,N - 3)\,x\,y + (N - 1)\,y^2 = 0$$

has non-trivial integral solutions if and only if

$$(5\,N - 3)^2 - (N - 1)^2 = 4\,(3\,N - 2)\,(2\,N - 1)$$

is a perfect square. Since

$$(3N-2, 2N-1) = (3N-2, 2N-1, N-1) = 1\,,$$

it is necessary that

$$2N-1 = a^2,\ 3N-2 = b^2,\ (a, b) = 1.$$

Hence a, b must satisfy

$$3a^2 - 2b^2 = 1\,. \tag{*}$$

Let (a_i, b_i) denote the (positive) solutions of (*) and put $N_i = (a_i^2+1)/2$, so that $N_i < N_{i+1}$. We shall show that

$$14a_i^2 + 20a_i b_i + 7b_i^2 = N_{i+1} = (a_{i+1}^2+1)/2\,. \tag{**}$$

By the theory of the Pell equation as applied to (*) we have

$$3a_{i+1} + b_{i+1}\sqrt{6} = (3a_i + b_i\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})\,,$$

so that

$$a_{i+1} = 5a_i + 4b_i\,. \tag{***}$$

Substituting from (***) in (**) we get $3a_i^2 - 2b_i^2 = 1$.

L. Carlitz, Duke University, USA

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig), I. Paasche (München), R. Whitehead (Hayle, England), G. Wulczyn (Lewisburg, USA).

Aufgabe 562. Show that

$$\sum_{r,s+0}^{m} (-1)^{r+s}\binom{m}{r}\binom{m}{s}\binom{r+s}{r}^2 = \sum_{j+k\leq m}\left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\right)^2.$$

L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C., USA

Solution by the Proposer: We show first that

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\binom{r}{j}\binom{r}{k} = \frac{m!}{(m-j)!\,(m-k)!\,(j+k-m)!}\,. \tag{1}$$

Put

$$A(m; j, k) = \sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\binom{r}{j}\binom{r}{k}.$$

Then

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{m} A(m; j, k)\, x^j y^k &= \sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\sum_{j,k=0}^{r}\binom{r}{j}\binom{r}{k} x^j y^k \\
&= \sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}(1+x)^r(1+y)^r = [(1+x)(1+y)-1]^m = (x+y+xy)^m \\
&= \sum_{r+s\leq m}\frac{m!}{r!\,s!\,(m-r-s)!}\, x^r y^s (xy)^{m-r-s} \\
&= \sum_{r+s\leq m}\frac{m!}{r!\,s!\,(m-r-s)!}\, x^{m-s} y^{m-r} \\
&= \sum_{j+k\geq m}\frac{m!}{(m-j)!\,(m-k)!\,(j+k-m)!}\, x^j y^k
\end{aligned}$$

and (1) follows at once.

Replacing j, k by $m-j$, $m-k$, respectively, (1) becomes

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\binom{r}{m-j}\binom{r}{m-k} = \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\,. \tag{2}$$

Note that (2) holds for all j, k such that $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant m$.

It follows from (2) that

$$\sum_{j+k \leq \min(m,n)} \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{m+n+r+s} \binom{m}{r} \binom{n}{s} \sum_j \binom{r}{m-j} \binom{s}{n-j} \sum_k \binom{r}{m-k} \binom{s}{n-k}.$$

Since

$$\sum_j \binom{r}{m-j} \binom{s}{n-j} = \sum_t \binom{r}{t} \binom{s}{n-m+t} = \binom{r+s}{r+n-m},$$

we get

$$\sum_{j+k \leq \min(m,n)} \frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!} \frac{n!}{j!\,k!\,(n-j-k)!}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{m+n+r+s} \binom{m}{r} \binom{n}{s} \binom{r+s}{r+n-m}^2.$$

In particular, when $m = n$,

$$\sum_{j+k \leq m} \left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!}\right)^2 = \sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{r+s} \binom{m}{r} \binom{m}{s} \binom{r+s}{r}^2.$$

Aufgabe 563. Man zeige, dass für alle ganzen Zahlen $n \geqq 3$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{n-1} = 0.$$

G. Bach, Braunschweig

Lösung: Die linke Seite der zu beweisenden Identität ist der Koeffizient von x^{n-1} in der Potenzreihenentwicklung von

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x})^n = \sum \binom{n}{k} (1+x)^{k/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{r} x^r = \sum a_r x^r$$

mit

$$a_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{r}.$$

Vergleicht man damit die Entwicklung von

$$\bar{f}(x) = (1 - \sqrt{1+x})^n = \sum \bar{a}_r x^r, \quad \text{wobei } \bar{a}_r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k/2}{r},$$

so erkennt man (weil die Terme mit geradem k für $r > k/2$ verschwinden), dass $\bar{a}_r = -a_r$ für alle $r > n/2$. Anderseits folgt aus $f(x)\,\bar{f}(x) \equiv (-x)^n$ und $a_0 \neq 0$, dass $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \ldots = \bar{a}_{n-1} = 0$. Also ist auch $a_r = 0$, falls $n/2 < r < n$. Das ist für $r = n-1$ die Behauptung der Aufgabe.

C. Bindschedler, Küsnacht

Diese Erweiterung der Aufgabe fand auch W. Jänichen (Berlin-Zehlendorf). L. Carlitz gibt die Werte der Koeffizienten a_r auch für $1 \leqq r \leqq n/2$ an (vgl. Aufgabe 586, dieses Heft, S. 140).

Eine weitere Lösung sandte I. Paasche (München).

Aufgabe 552 (El. Math. *23*, 91 (1968)). *Zweite Lösung:* Es gilt folgende allgemeinere Aussage: Es sei $A_1A_2A_3 \ldots A_{n+1}$ ein Simplex im R_n, k_{ij} die Kante A_iA_j und F_{ij} der gegenüberliegende $(n-2)$-dimensionale Raum. Es sei weiter Q eine Quadrik zweiter Klasse. Durch F_{ij} gehen zwei Q berührende $(n-1)$-dimensionale Räume, die k_{ij} in den Punkten B'_{ij} und B''_{ij} schneiden. Dann liegen sämtliche Punkte B auf einer Quadrik Q' zweiter Ordnung.

Zerfällt Q in zwei Punkte, so erhält man die Aussage der Aufgabe.

Beweis: Wir wählen das Simplex als Koordinatensimplex. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ sind Punktkoordinaten und $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ die dualen R_{n-1}-Koordinaten. Q habe die Gleichung $\Sigma\, a_{ij}\, u_i\, u_j = 0$. Für jeden R_{n-1} durch z.B. $A_1 A_2$ gilt $u_3 = u_4 = \ldots = u_{n+1} = 0$ und daher für die zwei Berührungs-R_{n-1} an Q auch noch

$$a_{11}\, u_1^2 + 2\, a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{22}\, u_2^2 = 0\,.$$

Der R_{n-1} mit den Koordinaten u_i schneidet die Kante k_{12} im Punkt $(u_2, -u_1, 0, 0, \ldots, 0)$. Für die Koordinaten der Punkte B'_{12} und B''_{12} gilt also

$$a_{11}\, x_2^2 - 2\, a_{12}\, x_2\, x_1 + a_{22}\, x_1^2 = 0$$

oder

$$x_1^2/a_{11} - 2\, a_{12}\, x_1\, x_2/a_{11}\, a_{22} + x_2^2/a_{22} = 0\,,\quad x_3 = x_4 = \ldots = x_{n+1} = 0\,,$$

und allgemein für die Punkte B'_{ij} und B''_{ij}

$$x_i^2/a_{ii} - 2\, a_{ij}\, x_i\, x_j/a_{ii}\, a_{jj} + x_j^2/a_{jj} = 0\,,\quad x_k = 0\ (k \neq i, k \neq j)\,.$$

Die Punkte B liegen also auf der Quadrik mit der Gleichung $\Sigma\, a'_{ij}\, x_i\, x_j = 0$, wobei $a'_{ii} = 1/a_{ii}$ und $a'_{ij} = -\, a_{ij}/a_{ii}\, a_{jj}$ $(i \neq j)$. Wir haben $a_{ii} \neq 0$ vorausgesetzt, d.h. Q berührt keine Seite des Simplexes. Auch im andern Fall kann man den Satz einfach beweisen. Die Zuordnung von Q' zu Q hat ein gewisses Interesse. So fällt Q' mit Q zusammen, wenn das Simplex ein Polarsimplex von Q ist.

O. Bottema, Technische Hogeschool, Delft

Neue Aufgaben

Aufgabe 585. Die Eckpunkte A_i $(i = 1, 2, 3)$ eines gegebenen Dreiecks sind die Mittelpunkte von drei Kreisen, die durch einen Punkt P gehen. B_i sei der zweite Schnittpunkt der Kreise um A_{i+1}, A_{i+2} $(A_4 = A_1,\ A_5 = A_2)$.

1. Konstruiere die Punkte P, für die das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ gleichseitig ist.
2. Für welche Punkte P liegen B_1, B_2, B_3 auf einer Geraden?
3. Beweise, dass die Umkreise der Dreiecke $A_i B_{i+1} B_{i+2}$ $(i = 1, 2, 3)$ sich in einem Punkt schneiden.

J. Brejcha, Brno, ČSSR

Aufgabe 586. Show that

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{m} = \frac{n}{m} \binom{n-m-1}{m-1}\, 2^{n-2m}\ (m \geqq 1)\,.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Aufgabe 587. Prove that either of the following properties characterize the exponential function:

Property 1. $f(z)$ non-zero, entire and there exists a simple analytic arc A which divides the plane into two unbounded simply connected domains S_1 and S_2 with

$$f(S_1) \subset \{w\colon |w| < 1\} \text{ and } f(S_2) \subset \{w\colon |w| > 1\}\,.$$

Property 2. $f(z)$ entire and the image of the left and right half planes are contained in $\{w\colon |w| < 1\}$ and $\{w\colon |w| > 1\}$ respectively.

W. J. Schneider, Syracuse University, USA

Aufgabe 588. Ist n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl, so gilt

$$(p\,n - 1)!\,[(n-1)!]^{-p}\, n^{1-p} \not\equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow n = p^k\,.$$

E. Trost, Zürich