Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Autor(en): **Heigl, F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26646

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elementare Ableitung der Laplaceschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Den Abschluss der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet die Untersuchung der grundlegenden Gesetzmässigkeiten, die eines der wichtigsten Schemata der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Schema einer Folge unabhängiger Versuche, beherrschen. Die Tatsachen, die man an diesem Schema bemerkte, waren richtungweisend bei der Untersuchung komplizierterer Schemata, die man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet. BERNOULLI hat eine Folge unabhängiger Zufallsgrössen für den Fall untersucht, dass nur die komplementären Ereignisse A und $\bar{A}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $w(A) = p$, $w(\bar{A}) = q = 1 - p$ eintreten. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A bei n unabhängigen Durchführungen des Experimentes genau x-mal eintritt, ist gegeben durch die nach NEWTON bezeichnete Formel

$$w_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots, n) .$$

Die so bestimmte diskrete Verteilung heisst Bernoullische oder binomische Verteilung. Sie spielt in den Anwendungen eine grosse Rolle. Da die Newtonsche Formel für grosse n numerisch schwer zu handhaben ist, ist es notwendig, eine asymptotische Formel aufzustellen, die es gestattet, $w_n(x)$ auch für grosse n in einfacher Weise und mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen. Diese Formel hat als erster LAPLACE 1812 für beliebige $0 < p < 1$ angegeben. Sie zählt zu den wichtigsten Resultaten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn hier tritt zum erstenmal das Exponentialgesetz oder die Normalverteilung auf, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung grosse Bedeutung hat. Bei der Ableitung der Laplaceschen Formel werden aber vielfach kompliziertere Hilfsmittel benutzt, wie Reihenentwicklungen, Stirlingsche Formel, charakteristische Funktionen, zentraler Grenzwertsatz. Hier soll aufgezeigt werden, wie man mit einfacheren Hilfsmitteln der Infinitesimalrechnung den Grenzübergang zur Laplaceschen Formel durchführen und die gleichmässige Konvergenz der Newtonschen Formel gegen die Laplacesche Formel in jedem abgeschlossenen Intervall nachweisen kann.

Der Beweis setzt die Kenntnis der statistischen Masszahlen Erwartungswert $E(X)$ und Streuung $D^2(X)$ einer binomisch verteilten Zufallsgrösse X voraus. Es gilt [1]

$$E(X) = \xi = \sum_{\gamma=1}^{n} \gamma \, w_n(\gamma) = n\,p ,$$

$$D^2(X) = \sigma = E\,(X - \xi)^2 = n\,p\,q , \qquad (p + q = 1) .$$

Ordnet man nach MISES [2] der diskreten Variablen x die Variable y zu durch die Transformation

$$y = x - n\,p , \tag{1}$$

betrachtet man also die Zufallsgrösse

$$Y = X - n\,p\,, \tag{1'}$$

so ist $E(Y) = 0$ für alle n, während $D^2(Y)$ unverändert gleich $n\,p\,q$ ist. Die Transformation (1') wird nun so abgeändert, dass nicht nur $E(Y)$ von n unabhängig wird, sondern auch $D^2(Y)$. Dies leistet folgende Transformation:

$$Z = h\,(X - n\,p)\,, \tag{2}$$

wobei h ein positiver Parameter ist. Die Zufallsgrösse Z hat dann den Erwartungswert $E(Z) = 0$, die Streuung $D^2(Z) = h^2\,n\,p\,q$. Setzt man

$$h^2 = \frac{1}{\tau\,n\,p\,q}\,, \tag{3}$$

wobei τ ein beliebiger fest gewählter positiver Parameter ist, so gilt $D^2(Z) = 1/\tau$, die Streuung ist also unabhängig von n.

Deutet man die $w_n(\gamma)$ als Massenpunkte, die in den Punkten $x = \gamma$ konzentriert sind, so kann $E(X)$ als Schwerpunkt, $D^2(X)$ als Trägheitsmoment der Massenverteilung bezüglich des Schwerpunktes gedeutet werden. Daraus folgt, dass der Schwerpunkt der Verteilung von Z für alle n im Nullpunkt liegt, wobei die Massenpunkte um den Schwerpunkt so angeordnet sind, dass alle Verteilungen dasselbe Trägheitsmoment um den Schwerpunkt haben.

Transformation (2) hat noch folgende bemerkenswerte Eigenschaften: Da $z = h\,(x - n\,p)$ ist, gilt

$$x = n\,p + \frac{z}{h}\,, \qquad x + 1 = n\,p + \frac{z + h}{h}\,,$$

d.h. ändert sich x um 1, so ändert sich die entsprechende Grösse z um h. Ist nun n genügend gross, so ist h nach (3) entsprechend klein. Das bedeutet, dass die w_n-Werte, als Funktionen der diskreten Veränderlichen z aufgefasst, mit zunehmendem n immer mehr um den Nullpunkt zusammengeschoben werden, so dass die Streuung konstant bleibt. Man kann daher erwarten, dass sich für die oberen Begrenzungspunkte der w_n-Werte für $n \to \infty$ eine kontinuierliche glatte Kurve ergibt, deren Gleichung nun ermittelt werden soll.

Der Beweis stützt sich auf einige bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion. Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,,$$

wobei n irgendeine divergente Zahlenfolge durchläuft. Die Folge der Funktionen $f_n(x) = (1 + (x/n))^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ konvergiert monoton gegen e^x, sofern $1 + (x/n) > 0$ ist. Durch Wahl genügend grosser n kann diese Ungleichung für alle x aus einem abgeschlossenen Intervall erfüllt werden. Man kann nun zeigen, dass eine in einem abgeschlossenen Intervall $J = (a, b)$ mit $a < b$ monotone beschränkte Funktionenfolge in J sogar gleichmässig konvergiert. Um dies für unseren Fall zu beweisen, setzt man

$$\delta_n(x) = e^x - (1 + (x/n))^n\,.$$

Es ist dann zu zeigen, dass $\delta_n(x) < \varepsilon$ wird für $n > N(\varepsilon)$, wobei N von den x aus J unabhängig ist. Betrachtet man einen Punkt x_1 aus J, so sei $\delta_n(x_1) < \varepsilon/2$ für $n > N(x_1)$. Da aber $\delta_n(x)$ eine stetige Funktion für alle x aus J ist, insbesondere für $x = x_1$, so gibt es eine abgeschlossene Umgebung $U(x_1)$ von x_1, so dass die Schwankung von $\delta_n(x)$ für alle x aus $U(x_1)$ die Grösse $\varepsilon/2$ nicht überschreitet. Es ist dann $\delta_n(x) < \varepsilon$ für alle x aus $U(x_1)$ und $n > N(x_1)$. Die abgeschlossene Punktmenge aus J lässt sich durch endlich viele Umgebungen $U(x_\mu)$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots, m)$ so lückenlos überdecken – wobei teilweise Überlagerungen der einzelnen $U(x_\mu)$ nicht ausgeschlossen sind – so dass für alle x aus den $U(x_\mu)$ jeweils $\delta_n(x) < \varepsilon$ wird, sofern nur $n > N(x_\mu)$ ist. Ist $N = \operatorname{Max}\,[N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_m)]$, so ist $\delta_n(x) < \varepsilon$ für alle x aus J, d.h. die Folge der $f_n(x)$ konvergiert für alle x aus J gleichmässig gegen e^x.

Da der Ausdruck für $w_n(x)$ infolge der darin vorkommenden Binomialkoeffizienten schwer zu handhaben ist, betrachtet man den Quotienten $w_n\,(x+1)/w_n(x)$. Es gilt wegen (2) und (3)

$$\frac{w_n\,(x+1)}{w_n(x)} = \frac{n-x}{n+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1 - \dfrac{z}{n\,h\,q}}{1 + \dfrac{z+h}{n\,h\,p}}.$$

Daraus folgt

$$\ln w_n\,(x+1) - \ln w_n(x) = \ln\left(1 - \frac{z}{n\,h\,q}\right) - \ln\left(1 + \frac{z+h}{n\,h\,p}\right).$$

Für $x \neq n$ sind die Argumente der Logarithmen > 0. Mit der Abkürzung $\ln w_n(x) = y_n(z)$ werden nun die Quotienten

$$\frac{y_n\,(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln\left(1 - \frac{z}{n\,h\,q}\right)^{1/h} - \ln\left(1 + \frac{z+h}{n\,h\,p}\right)^{1/h}$$

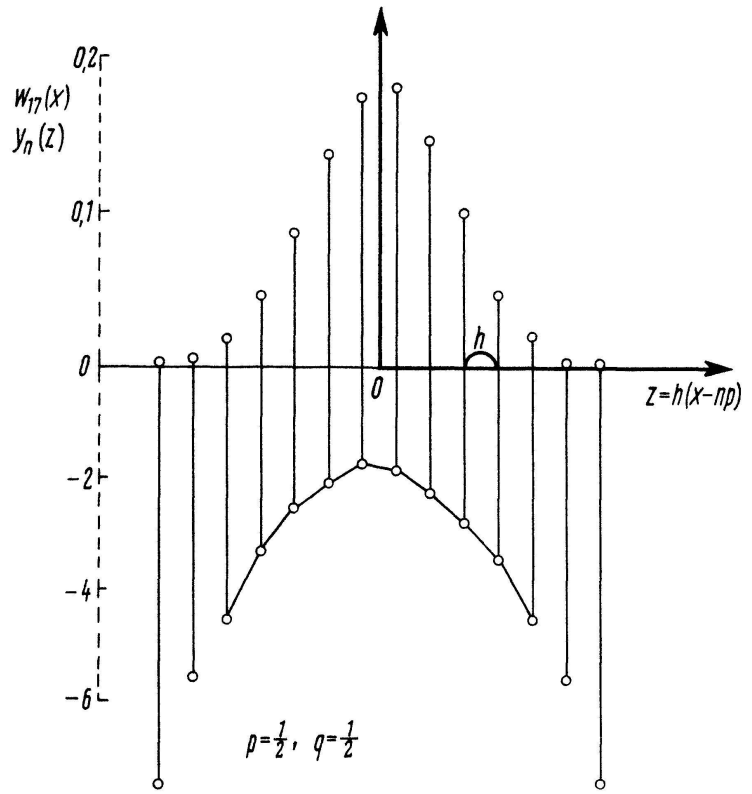
gebildet, die nur für solche diskrete Werte z definiert sind, für die das Argument von w_n eine ganze Zahl ist. Da nach (3) $h^2 = 1/\tau\,n\,p\,q$ ist, also $n\,h\,q = 1/\tau\,p\,h$, $n\,h\,p = 1/\tau\,q\,h$ ist, gilt

$$\frac{y_n\,(z+h) - y_n(z)}{h} = \ln(1 - \tau\,p\,h\,z)^{1/h} - \ln(1 + \tau\,q\,h\,(z+h))^{1/h}.$$

Die Argumente der Logarithmen stellen wegen (3) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ zwei Folgen in z dar, die nach den obigen Feststellungen für $n \to \infty$ gleichmässig gegen $e^{-\tau\,p\,z}$ bzw. $e^{-\tau\,q\,z}$ konvergieren. Infolge der Stetigkeit des Logarithmus konvergieren also auch die Quotienten gleichmässig, und zwar gegen $-\tau\,p\,z - \tau\,q\,z = -\tau\,z$, da $p + q = 1$ ist. Die gesuchte Grenzfunktion der $y_n(z)$ für $n \to \infty$, die mit $y(z)$ bezeichnet wird, genügt daher der Differentialgleichung $y'(z) = -\tau\,z$, daher ist $y(z) = -(\tau/2)\,z^2 + \text{konst.}$ Damit ist

$$\left|\frac{y_n\,(z+h) - y_n(z)}{h} + \tau\,z\right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon) \tag{4}$$

und alle z etwa aus dem Intervall $J = (-a, a-h)$, so dass $|\,z\,| < a$, $|\,z+h\,| < a$ ist. Verbindet man nun die Endpunkte jeweils benachbarter Ordinaten $y_n(z)$ geradlinig (s. Abbildung), so entsteht ein stetiger Kurvenzug der kontinuierlich veränderlichen Grösse z.



Mit der so definierten Funktion, die mit $\bar{y}_n(z)$ bezeichnet wird, betrachtet man die Integralfolge

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h}\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Dabei sollen z_0 und z ($z_0 < z$) positiven ganzzahligen x entsprechen. Deutet man das bestimmte Integral als Fläche, so ergibt sich aus der Abbildung für (5) die Darstellung: $y_n(z + (h/2)) - \bar{y}_n(z_0 + (h/2))$. Da (4) auch dann gilt, wenn man y_n durch $\bar{y}_n$ ersetzt, erhält man

$$\left| \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\bar{y}_n(t+h) - \bar{y}_n(t)}{h} + \tau\, t \right) dt \right| < \varepsilon\,(z - z_0) < \varepsilon \cdot 2\,a\,.$$

Die Integralfolge (5) konvergiert also gleichmässig gegen die Grenzfunktion

$$-\int_{z_0}^{z} \tau\, t\, dt = -\frac{\tau}{2} \cdot z^2 + \frac{\tau}{2} \cdot z_0^2\,.$$

Daraus ergibt sich die gleichmässige Konvergenz der Folge $\bar{y}_n(z)$ gegen die Grenzfunktion $-(\tau/2)\, z^2 +$ konst. Dasselbe gilt auch für die Folge $y_n(z)$, denn $\bar{y}_n(z) = y_n(z)$ für solche z, denen positive ganzzahlige x entsprechen, und das ist das wesentlichste Ergebnis der ganzen Untersuchung.

Da $y_n(z) = \ln w_n(x)$ ist, folgt

$$w_n(x) = C \cdot e^{-\frac{\tau}{2} z^2} = C \cdot e^{-\frac{(x - n\,p)^2}{2\,n\,p\,q}}$$

unabhängig von τ.

Die Konstante C berechnet sich aus der Forderung, dass $w_n(x)$ für $n \to \infty$ eine Dichtefunktion der Variablen x sein muss, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)\, dx$ muss gleich 1 sein. Da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ ist, folgt $C = 1/\sqrt{2\pi n p q}$.

Zusammenfassend erhält man also den Satz von Laplace:

Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A in n unabhängigen Versuchen konstant gleich p $(0 < p < 1)$ ist, so genügt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesen Versuchen das Ereignis A genau x-mal eintritt, für $n \to \infty$ der Beziehung

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}} \cdot e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}},$$

und zwar gleichmässig für alle x, für die sich die nach (2) entsprechende Grösse z in einem endlichen Intervall befindet.

F. HEIGL, Weiden BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. BUCHNER, *Bemerkungen zum Satz von Bernoulli*, El. Math. 7, 8 (1952).
[2] R. v. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Rosenberg-Verlag, New York 1945).

Allgemeine Gestalt einer geradenerhaltenden Abbildung

In der folgenden Abhandlung soll gezeigt werden, dass eine stetige geradenerhaltende Abbildung der Ebene auf sich projektiv sein muss. Zu diesem Zweck wird zunächst Satz 1 bewiesen.

Satz 1: Es gibt genau eine projektive Abbildung der Ebene auf sich, die 4 Punkte A, B, C, O in allgemeiner Lage[1]) in 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in allgemeiner Lage überführt, wobei A in P_1, B in P_2, C in P_3 und O in P_4 übergeht.

Beweis: Den folgenden Überlegungen sind homogene Koordinaten zugrunde gelegt. Die gesuchte projektive Abbildung werde in der Gestalt

$$T: \quad \begin{aligned} \varrho x &= a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w, \\ \varrho y &= a_{21} u + a_{22} v + a_{23} w, \\ \varrho z &= a_{31} u + a_{32} v + a_{33} w \end{aligned}$$

angesetzt. Das Koordinatendreieck wollen wir dabei so wählen, dass seine Ecken mit A, B, C zusammenfallen, während O der Einheitspunkt ist, was stets möglich ist, da ja A, B, C und O in allgemeiner Lage sind. Für die Koordinatendarstellung von A, B, C und O gilt dann:

$$A(1,0,0), \quad B(0,1,0), \quad C(0,0,1), \quad O(1,1,1).$$

[1]) 4 Punkte heissen «in allgemeiner Lage», wenn keine drei auf einer Geraden liegen.