Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 24 (1969)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

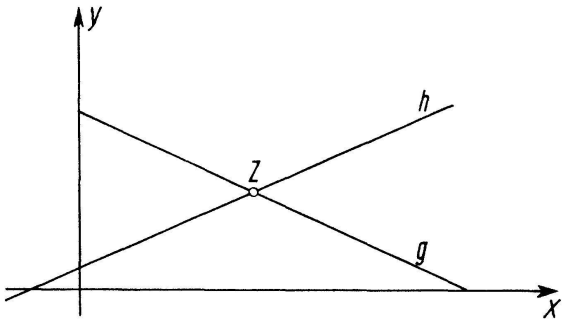
Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch



Figur 4

also: Jeder Punkt der XY-Ebene ist ein Fixpunkt der Abbildung. Die durch die Formeln (5) vermittelte Abbildung muss also die identische Abbildung sein.

Es muss also gelten:

$$\varrho\, x = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + b_{13} f_3 ,$$
$$\varrho\, y = b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + b_{23} f_3 ,$$
$$\varrho\, z = b_{31} f_1 + b_{32} f_2 + b_{33} f_3 .$$

Wegen $B \neq O$ folgt daraus

$$f_1 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} x & b_{12} & b_{13} \\ y & b_{22} & b_{23} \\ z & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_2 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & x & b_{13} \\ b_{21} & y & b_{23} \\ b_{31} & z & b_{33} \end{vmatrix}, \qquad f_3 = \frac{\varrho}{B} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & x \\ b_{21} & b_{22} & y \\ b_{31} & b_{32} & z \end{vmatrix} .$$

Die gesuchten Abbildungsgleichungen sind daher linear und homogen.

J. MALL, München

LITERATUR

BIEBERBACH, L. *Projektive Geometrie*, (Leipzig und Berlin 1931) § 10.
BLASCHKE, W. *Projektive Geometrie*, (Basel 1954). Abschnitt 17
SCHREIER, O., SPERNER, L., *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II, (Leipzig 1935) § 17.

Kleine Mitteilungen

Über « Super perfect numbers »

In Band *24*, S. 16–17 dieser Zeitschrift, hat Herr D. SURYANARAYANA eine kleine Mitteilung veröffentlicht mit dem Titel « Super perfect numbers ». Er betrachtet natürliche Zahlen n, welche

$$\sigma(\sigma(n)) = 2\, n \tag{1}$$

genügen, wobei $\sigma(n)$ die Summe aller (positiven) Teiler von n bedeutet. Eine solche Zahl wird «super perfect number» genannt. Wir wollen kurz s.p.n. schreiben. In der obigen Mitteilung wird der folgende Satz bewiesen: « Eine gerade Zahl n ist genau dann eine s.p.n., wenn $n = 2^r$, und $2^{r+1} - 1$ eine Primzahl ist. »

In diesem Beweis ist eine kleine Ungenauigkeit, welche aber leicht zu beheben ist. Im zweiten Teil des Beweises wird behauptet, dass $(2^{r+1} - 1)\ \sigma(q)$; $\sigma(q)$; $2^{r+1} - 1$ und 1

verschiedene Teiler von $(2^{r+1}-1)\,\sigma(q)$ sind. Das ist aber nur richtig, wenn $\sigma(q) \neq 2^{r+1}-1$ erfüllt ist. (Gegenbeispiel: $q = 25$, $r = 4$).

Man kann aber den Beweis so führen: Ist $q > 1$, so sind $(2^{r+1}-1)\,\sigma(q)$; $\sigma(q)$; 1 verschiedene Teiler von $(2^{r+1}-1)\,\sigma(q)$. Es folgt

$$2^{r+1} q \geqq (2^{r+1}-1)\,\sigma(q) + \sigma(q) + 1 > 2^{r+1}\,\sigma(q)\,.$$

Weil $\sigma(q) > q$, ergibt sich ein Widerspruch.

Am Schluss wird die Frage nach der Existenz einer ungeraden s.p.n. gestellt. Dazu gilt der

Satz. *Ist n eine ungerade s.p.n., so muss n eine Quadratzahl sein.*

Beweis. Es sei $n = \prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}$ in der kanonischen Zerlegung gegeben. Dann gilt

$$\sigma(n) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (1 + p_\varkappa + \ldots + p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}) = \prod_{\lambda=1}^{l} q_\lambda^{\beta_\lambda}\,, \tag{2}$$

wobei der letzte Ausdruck die kanonische Zerlegung von $\sigma(n)$ sein soll. Für eine s.p.n. gilt nach (1)

$$\sigma(\sigma(n)) = \prod_{\lambda=1}^{l} (1 + q_\lambda + \ldots + q_\lambda^{\beta_\lambda}) = 2n = 2\prod_{\varkappa=1}^{k} p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}\,. \tag{3}$$

$$\frac{\sigma(\sigma(n))}{\sigma(n)} \cdot \frac{\sigma(n)}{n} = \prod_{\lambda=1}^{l}\left(1 + \frac{1}{q_\lambda} + \cdots + \frac{1}{q_\lambda^{\beta_\lambda}}\right) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k}\left(1 + \frac{1}{p_\varkappa} + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}\right) = 2\,. \tag{4}$$

Ist n ungerade und keine Quadratzahl, dann folgt $\sigma(n) \equiv 0 \pmod 2$, d.h. o.B.d.A.

$$q_1 = 2\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt weiterhin o.B.d.A.

$$p_1 \leqq 1 + 2 + \ldots + 2^{\beta_1} = 2^{\beta_1+1} - 1\,. \tag{6}$$

Nach (4) und (6) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 &\geqq \frac{2^{\beta_1+1}-1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{p_1+1}{p_1} \cdot \prod_{\lambda=2}^{l}\left(1 + \cdots + \frac{1}{q_\lambda^{\beta_\lambda}}\right) \cdot \prod_{\varkappa=2}^{k}\left(1 + \cdots + \frac{1}{p_\varkappa^{\alpha_\varkappa}}\right) \\ &\geqq \frac{2^{\beta_1+1}-1}{2^{\beta_1}} \cdot \frac{2^{\beta_1+1}}{2^{\beta_1+1}-1} = 2\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich sogleich

$$k = l = 1\,, \quad \alpha_1 = 1 \text{ und } p_1 = 2^{\beta_1+1} - 1\,. \tag{8}$$

Dann folgt

$$\sigma(n) = p_1 + 1 = 2^{\beta_1+1}; \quad \sigma(\sigma(n)) = 2^{\beta_1+2} - 1 = 2p_1\,, \tag{9}$$

worin der Widerspruch ersichtlich wird. H.-J. Kanold, Braunschweig

Zur Möbiusinvolution der Ebene

1. Herr Strubecker hat in einer Abhandlung gleichen Titels [1] einen ausführlichen Bericht über zwei sich bei einer Möbiusinvolution darbietende Probleme gegeben: 1. das Problem, ihre beiden Fixpunkte und 2. bei zwei gegebenen Punktepaaren (A, A') und (B, B') zu einem weiteren Punkt C den Bildpunkt C' zu konstruieren. Es gelang ihm, für das 2. Problem eine ganz besonders einfache Lösung in zweierlei Gestalt zu finden:

Bezeichnen $(AB'C)$, $(A'BC)$, (ABC), $(A'B'C')$ die Kreise durch die drei eingeklammerten Punkte, und $(AB'C)\cdot(A'BC) = D$, $(ABC)\cdot(A'B'C) = D'$ die Schnittpunkte der eingeklammerten Kreise, so ist entweder $(ABC)\cdot(A'B'D) = C'$ oder auch $(AB'D')\cdot(A'BD') = C'$.

Die Einfachheit der Konstruktion legt nahe, einen ebenso einfachen Beweis für sie zu suchen, ohne die Theorie der harmonischen Quadrupel (H. Wiener) oder räumliche Betrachtungen dafür (K. Strubecker) in Anspruch zu nehmen.

2. Eine *Möbiusinvolution* ist zunächst in komplexen Koordinaten durch eine Gleichung

$$\bar{z} = \frac{A\,z + B}{C\,z - A} \tag{1}$$

gegeben, wo A, B, C komplexe Konstanten mit nichtverschwindender Determinante $-A^2 - B\,C \neq 0$ sind. Bezeichnet man zwei entsprechende Punktepaare von (1) mit $(a, \bar{a})$ und $(b, \bar{b})$, so lautet die durch sie gegebene Involution

$$\begin{vmatrix} z\bar{z} & z + \bar{z} & 1 \\ a\bar{a} & a + \bar{a} & 1 \\ b\bar{b} & b + \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{2}$$

Wir bezeichnen nun die Koordinaten der in *1.* angegebenen Punkte A, A'; B, B'; C, C'; D mit a, $\bar{a}$; b, $\bar{b}$; z, $\bar{z}$ und u. Nach der angegebenen Konstruktion sollen u, a, $\bar{b}$, z auf einem Kreise liegen, also muss das Doppelverhältnis (DV)

$$\frac{u - a}{u - \bar{b}} : \frac{z - a}{z - \bar{b}} = \lambda \tag{3}$$

reell sein, nämlich gleich dem DV der Strecken $\overline{ua}/\overline{u\bar{b}} : \overline{za}/\overline{z\bar{b}}$ (die Umfangswinkel über $\overline{a\bar{b}}$ in u und z sind gleich).

Genau so müssen die Gleichungen gelten:

$$\frac{u - \bar{a}}{u - b} : \frac{z - \bar{a}}{z - b} = \mu = \frac{\overline{u\bar{a}} \cdot \overline{zb}}{\overline{ub} \cdot \overline{z\bar{a}}} \tag{4}$$

$$\frac{u - a}{u - b} : \frac{\bar{z} - a}{\bar{z} - b} = \lambda' = \frac{\overline{ua} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{ub} \cdot \overline{\bar{z}a}} \tag{5}$$

$$\frac{u - \bar{a}}{u - \bar{b}} : \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{z} - \bar{b}} = \mu' = \frac{\overline{u\bar{a}} \cdot \overline{\bar{z}\bar{b}}}{\overline{u\bar{b}} \cdot \overline{\bar{z}\bar{a}}} \tag{6}$$

Aus den linken Seiten von (3) bis (6) lässt sich nun der Hilfspunkt u sofort eliminieren und es käme, wenn die Gleichung (7) $\lambda\,\mu = \lambda'\,\mu'$ gelten würde, sofort die Gleichung

$$\frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} : \frac{\bar{z} - \bar{b}}{z - b} = \frac{z - a}{\bar{z} - a} : \frac{z - b}{\bar{z} - b}\,. \tag{8}$$

Diese ist aber nichts anderes als die Gleichung der Möbiusinvolution, die nach Abscheidung des Faktors $\bar{z} - z \neq 0$ in die einfache Gleichung (2) übergeht. Die Gleichung (7) aber lautet

$$\frac{\overline{zb} \cdot \overline{z\bar{b}}}{\overline{za} \cdot \overline{z\bar{a}}} = \frac{\overline{\bar{z}\bar{b}} \cdot \overline{\bar{z}b}}{\overline{\bar{z}\bar{a}} \cdot \overline{\bar{z}a}}\,, \tag{9}$$

und sie gilt tatsächlich. Da nämlich die Zuordnung

$$z \to \bar{z},\ a \to \bar{a}\,,\ \bar{a} \to a,\ b \to \bar{b},\ \bar{b} \to b$$

gilt, so ist die linke Seite von (9) die bekannte *Inversionsinvariante*, oder, da sie ebenso für Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen gilt, *Möbiusinvariante* von vier Strecken zwischen vier Punkten. Damit ist aber die Strubeckersche Konstruktion auf sehr einfache Weise bewiesen.

K. Fladt, Calw

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Strubecker, *Zur Möbiusinvolution der Ebene*, Monatsh. Math. Phys. *41*, 439-444 (1934).

Eine Bemerkung über mehrdimensionale Axonometrien

Definitionen: Eine lineare Abbildung π von E_n auf $E_m \subset E_n$ heisst (n,m)-*Parallelprojektion*, wenn $P \in \pi^{-1} P$ für jedes $P \in E_m$ gilt. Ist $\pi^{-1} P \perp E_m$, so bekommt man eine (n,m)-*Normalprojektion*. Eine (n,m)-Parallelprojektion $\pi: E_n \to E_m$ zusammen mit einem festen orthonormierten n-Bein $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)$ in E_n heisst eine (n,m)-*Axonometrie*. Eine (n,m)-Normalprojektion $\pi: E_n \to E_m$ gemeinsam mit einem festen orthonormierten n-Bein $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)$ in E_n heisst (n,m)-*Normalaxonometrie*. Weiter setzen wir

$$a_i = |\, \pi\, \mathfrak{n}_i \,|\,, \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \alpha_{ij} = \sphericalangle\, \pi\, \mathfrak{n}_i\,,\ \pi\, \mathfrak{n}_j \quad \text{für} \quad i, j = 1, \ldots, n\,.$$

L. A. Jazkewitsch zeigte in [2], dass in jeder (n,m)-Normalaxonometrie

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = m\,, \qquad a_1 + \cdots + a_n \leq \sqrt{n\,m}$$

gilt. Dagegen bewies J. Schopp in [3], dass in jeder $(n, n-1)$-Axonometrie

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq n - 1 < a_1 + \cdots + a_n$$

in Kraft ist. Im folgenden möchten wir diese Beziehungen noch verallgemeinern.

Behauptung 1. *In einer beliebigen (n,m)-Axonometrie gilt für die Summe s_k sämtlicher k-Hauptminoren der Matrix $\| a_i\, a_j \cos \alpha_{ij} \|$ die Ungleichung*

$$(-1)^{n-k-1} \cdot s_k \geq \binom{m}{k}, \qquad 1 \leq k \leq m\,.$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau im Falle der (n,m)-Normalaxonometrie.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgendem Satz ([4]): *Es sei $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ ein Vektor-n-tupel in $E_m \subset E_n$. Eine (n,m)-Axonometrie $\pi: E_n \to E_m$ mit $\pi\, \mathfrak{n}_i = \mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, existiert gerade dann, wenn für die (notwendig reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ von $\| \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j \|$ die Beziehungen $\lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_m = 1$, $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ gelten. Hierbei charakterisiert der Fall $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 1$ gerade die (n,m)-Normalaxonometrien.* Es genügt jetzt, die bekannten Eigenschaften der elementarsymmetrischen Polynome zu verwenden (vgl. [1], S. 83), um die Behauptung 1 zu gewinnen. Für $k = 1$ erhält man $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq m$ (vgl. [3]) und $s_1 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = m$ gilt genau im Falle der (n,m)-Normalaxonometrie (vgl. [2] und [3]). Einen einfachen direkten Beweis der in jeder (n,m)-Normalaxonometrie geltenden Gleichung $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = m$ bekommen wir auch so: Es sei

$$E_m = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in})\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\pi\, \mathfrak{n}_i = (e_{i1}, \ldots, e_{im}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Weil $\| e_{ij} \|$ eine orthogonale Matrix ist, so ist auch $\| e_{ij} \|^T$ eine orthogonale Matrix, woraus folgt

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} e_{ij}^2 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m} = m\,.$$

Behauptung 2. *In einer beliebigen (n,m)-Axonometrie $\pi: E_n \to E_m$ gilt $a_1 + \cdots + a_n > m$.*

Beweis. Es sei π eine (n,m)-Normalaxonometrie. Dann ist $|\, \pi\, \mathfrak{n}_i \,| \leq |\, \mathfrak{n}_i \,|$, d.h. $a_i \leqslant 1$; $i = 1, \ldots, n$. Gleichheit kann hier höchstens in m Fällen auftreten. Also ist

$$a_i^2 \leqslant a_i; \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad a_1^2 + \cdots + a_n^2 < a_1 + \cdots + a_n\,.$$

Aus $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = m$ ergibt sich $m < a_1 + \cdots + a_n$. Ist nun π nicht die (n,m)-Normalaxonometrie, so verwenden wir eine m-Ebene $E_m^* \perp \pi^{-1} P$, $P \in E_m$ und die (n,m)-Normalaxonometrie $\pi^* : E_n \to E_m^*$ mit demselben orthonormierten n-Bein $(\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n)$ wie π. Nach vorigem ist hier $a_1^* + \cdots + a_n^* > m$, wo $a_i^* = |\, \pi^* \mathfrak{n}_i \,|$, $i = 1, \ldots, n$. Es ist aber auch $a_i \geqslant a_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, weil $\pi^* (\pi \mathfrak{n}_i) = \pi^*(\mathfrak{n}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Hieraus folgt $a_1 + \cdots + a_n \geqslant a_1^* + \ldots + a_n^*$, so dass $a_1 + \cdots + a_n > m$, was zu beweisen war. VÁCLAV HAVEL, Brno

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. v. d. WAERDEN, *Moderne Algebra* 1, 2. Aufl. (New York 1943).
[2] L. A. JAZKEWITSCH, *Grundeigenschaften der Normalaxonometrie eines n-dimensionalen euklidischen Raumes, Fragen der angewandten Geometrie* (russisch) unter Redaktion von A.M. Tewlin, (Moskau 1966).
[3] J. SCHOPP, *Über die n-dimensionalen Axonometrien*, El. Math. *19*, 108–111 (1964).
[4] V. HAVEL, *Über eine Zerlegung der singulären linearen Transformationen* (tschechisch), Cas. pest. mat. *85*, 439–447 (1960).

Aufgaben

Aufgabe 573. Man konstruiere (mit Zirkel und Lineal) a) ein beliebiges rechtwinkliges, b) ein beliebiges nichtgleichseitiges, gleichschenkliges Dreieck aus den Schnittpunkten seiner Mittelsenkrechten, seiner Höhen und seiner Winkelhalbierenden.

K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung: Bezeichnungen: Umkreismittelpunkt O, Inkreismittelpunkt I, Höhenschnittpunkt H.

a) Wegen $HO^2 - OI^2 = HO \cdot HI \cdot 2^{1/2}$ kann jede Seite des Dreiecks OHI aus den beiden andern berechnet werden, weshalb wir voraussetzen, dass O, H und I «richtig» liegen.

Der Kreis um O mit Radius OH (Umkreis) wird von der Geraden durch H und I ein zweites Mal in P geschnitten. Der zu PO normale Durchmesser ist die Hypotenuse, H die Rechtwinkelecke des Dreiecks.

b) I ist innerer Teilpunkt von OH, Y der I harmonisch zugeordnete äussere Teilpunkt. Der Mittelpunkt P des Kreises (Apolloniuskreis) mit dem Durchmesser IY liegt auf dem Umkreis des Dreiecks. Die Schnittpunkte von Umkreis (Radius OP) und Apolloniuskreis inzidieren mit den Endpunkten der Dreiecksbasis, womit das Dreieck gezeichnet werden kann.

Bemerkungen: Y ist der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Basis des Dreiecks berührt. I darf nicht Mittelpunkt von OH sein. F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Weitere Lösungen sandten M. BACHMANN (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), K. HODEL (Wädenswil), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. WIDMER (Biel).

Aufgabe 574. Sei r der Inkreisradius, s die Summe der (orientierten) Abstände des Mittelpunktes des Feuerbachkreises von den Seiten des Dreiecks.

Man beweise oder widerlege: Jedes nichtgleichseitige Dreieck, für das $s = 3r$ ist, lässt sich aus den Schnittpunkten der Mittelsenkrechten, der Höhen und der Winkelhalbierenden (mit Zirkel und Lineal) konstruieren. K. KOPFERMANN, Hannover

Lösung des Aufgabenstellers: Es gibt unendlich viele konstruierbare und unendlich viele nicht konstruierbare Dreiecke dieser Art.