Konjugierte Durchmesser und extremale Vierecke konvexer Bereiche

Autor(en): **Heil, E. / Krautwald, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26650

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 24 Heft 5 Seiten 97–120 10. September 1969

Konjugierte Durchmesser und extremale Vierecke konvexer Bereiche

§ 1. Definitionen und Einführung

Ein konvexer Bereich B sei eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge in der Ebene. Eine Sehne von B, d.h. ein Schnitt einer Geraden mit B, heisst Durchmesser, wenn es keine parallele Sehne von B grösserer Länge gibt. Eine Gerade g heisst Stützgerade von B, wenn sie B trifft und wenn B in einer der beiden durch g bestimmten abgeschlossenen Halbebenen liegt. Zwei nicht parallele Durchmesser heissen konjugiert, wenn es in den Endpunkten des einen Stützgeraden gibt, die parallel zum anderen sind und umgekehrt. Hierbei handelt es sich offenbar um eine Verallgemeinerung der konjugierten Durchmesser einer Ellipse. Doch gilt nun i.allg. nicht, dass einem Durchmesser genau ein konjugierter Durchmesser zugeordnet ist. Ein Viereck heisst dem Bereich B einbeschrieben oder Inviereck, wenn seine Ecken auf dem Rande ∂B von B liegen, es heisst umbeschrieben oder Umviereck, wenn seine Seiten Stützgeraden sind. Dabei verstehen wir unter einem Viereck stets ein konvexes Viereck, lassen aber zu, dass es zu einem Dreieck entartet. Diese Begriffe und alle folgenden Überlegungen gehören zur affinen Geometrie. Wir benutzen lediglich ein Inhaltsmass als Hilfsmittel.

Die Existenz eines Paares konjugierter Durchmesser ist verschiedentlich als Beweismittel benutzt worden. LAUGWITZ [5] zeigt, dass ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt mindestens zwei verschiedene Paare konjugierter Durchmesser besitzt. Dieser Beweis benutzt die von RADON [9] angegebene Parameterdarstellung des Randes. Nach FUNK [3] findet man konjugierte Durchmesser, wenn man ein kleinstes (d.h. flächenkleinstes) Umparallelogramm, nach BLASCHKE [1], wenn man ein grösstes Inviereck aufsucht.

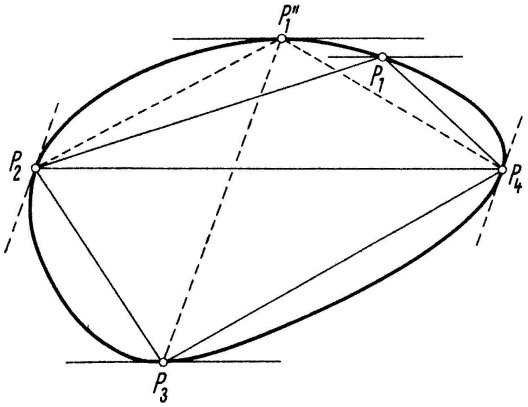
Wir zeigen, dass man so für jeden konvexen Bereich B zwei verschiedene Paare konjugierter Durchmesser findet. Hieran schliessen sich einige weitere Überlegungen an.

§ 2. Existenz zweier Paare konjugierter Durchmesser

1. Durch einige einfache Kompaktheitsschlüsse beweist man, dass es ein grösstes Inviereck und ein kleinstes Umparallelogramm des konvexen Bereiches B gibt.

Behauptung 1: *Die Diagonalen eines grössten Inviereck sind konjugierte Durchmesser.*

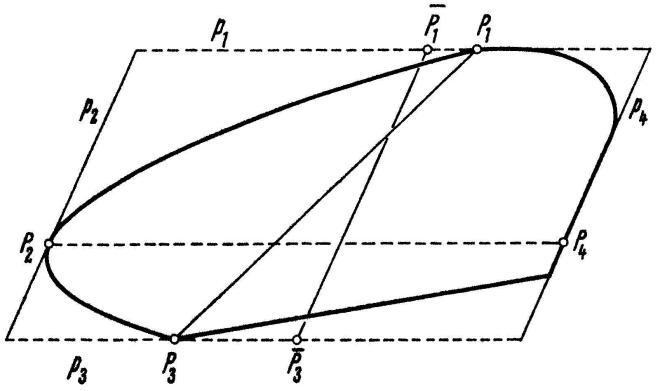
$P_1P_2P_3P_4$ sei ein grösstes Inviereck. Die Diagonalen P_1P_3 und P_2P_4 sind Durchmesser. Denn wäre etwa P_1P_3 nicht Durchmesser, gäbe es also eine parallele Sehne $P_1'P_3'$ grösserer Länge, dann hätte das Inviereck $P_1'P_2P_3'P_4$ grösseren Inhalt. Die Durchmesser P_1P_3 und P_2P_4 sind konjugiert. Denn gäbe es etwa in P_1 keine Stützgerade parallel zu P_2P_4, dann gäbe es einen Randpunkt P_1'', so dass $P_1''P_2P_3P_4$ grösseren Inhalt hätte. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.



Figur 1

Behauptung 2: *Auf jeder Seite p_i $(i = 1, \ldots, 4)$ eines kleinsten Umparallelogramms gibt es einen Punkt P_i von ∂B, so dass die Strecken P_1P_3 und P_2P_4 konjugierte Durchmesser sind.*

Für $P_i \in p_i$ sind P_1P_3 und P_2P_4 stets Durchmesser. Ist nun bei jeder Wahl der Randpunkte P_1 auf p_1 und P_3 auf p_3 der Durchmesser P_1P_3 niemals parallel zu p_2 (und p_4), so gibt es Punkte $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_3$ auf p_1 bzw. p_3, aber nicht auf ∂B derart, dass die Strecke $\overline{P}_1\overline{P}_3$ parallel zu p_2 ist und die Punkte P_1 und P_3 trennt. Dann kann man p_1 und p_3 um $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_3$ drehen, so dass diese Seiten parallel bleiben, aber keinen Punkt von B mehr enthalten. Dabei bleibt der Flächeninhalt ungeändert, doch berühren nun zwei Seiten des Parallelogramms B nicht mehr, so dass es also ein kleineres Umparallelogramm gibt. Das ist ausgeschlossen, und Behauptung 2 ist bewiesen.



Figur 2

Behauptung 3: *Die beiden so erhaltenen Paare konjugierter Durchmesser sind verschieden oder es gibt unendlich viele Paare.*

Jedem Durchmesser d von B ordnen wir ein grösstes Inviereck $V(d)$ zu, das d als Diagonale hat. Dann gibt es Stützgeraden durch die 4 Ecken von $V(d)$, die ein Umparallelogramm $W(d)$ bestimmen, welches dann notwendig den doppelten Inhalt wie $V(d)$ hat. Ist nun $V(d_0)$ ein absolut grösstes Inviereck, so gibt es entweder

a) Vierecke $V(d)$ mit kleinerem Inhalt oder

b) alle Vierecke $V(d)$ haben gleichen Inhalt.

Im Fall a) ist $W(d_0)$ kein kleinstes Umparallelogramm, so dass die in Behauptung 1 und 2 erhaltenen Paare konjugierter Durchmesser verschieden sind. Im Fall b) ist $W(d_0)$ ein kleinstes Umparallelogramm, und es gibt unendlich viele Paare konjugierter Durchmesser.

Im Fall a) gilt sogar, dass kein Durchmesser des einen Paares parallel zu einem Durchmesser des anderen Paares ist. Denn sind zwei Durchmesser parallel, so sind sie gleich lang und zugehörige Umparallelogramme haben gleichen Inhalt. Es gilt also:

Satz 1: *Jeder konvexe Bereich B besitzt mindestens 2 Paare konjugierter Durchmesser, die alle verschiedene Richtung haben.*

2. Wir hätten auch die eben benutzte Schar $V(d)$ von Invierecken benutzen können, um 2 Paare konjugierter Durchmesser zu erhalten. Ein grösstes und ein kleinstes Viereck dieser Schar liefert jeweils ein Paar konjugierter Durchmesser.

Dies lässt sich besonders einfach zeigen, wenn man voraussetzt, dass ∂B überall eine Tangente besitzt und keine Strecken enthält. Die 4 Ecken von $V(d)$ sind dann eindeutig bestimmt und lassen sich als differenzierbare Funktionen $\boldsymbol{x}_i(t)$, $i = 1, \ldots, 4$, darstellen, wobei d die Verbindung der Ecken $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_3$ sei. Der Inhalt $F(t)$ lässt sich durch die Determinante

$$2\,F = [\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4]$$

berechnen. Für die Extremwerte von $F(t)$ gilt

$$2\,\dot{F} = [\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3, \dot{\boldsymbol{x}}_2 - \dot{\boldsymbol{x}}_4] + [\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_3, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4] = 0\,.$$

Nach Konstruktion von $V(d)$ verschwindet die erste Determinante. Da die Parameterdarstellung so gewählt werden kann, dass $\dot{\boldsymbol{x}}_1 \neq 0$ ist, und da $\dot{\boldsymbol{x}}_1$ und $\dot{\boldsymbol{x}}_3$ entgegengesetzt gerichtet sind, ist $\dot{\boldsymbol{x}}_1 - \dot{\boldsymbol{x}}_3 \neq 0$, und folglich sind $\dot{\boldsymbol{x}}_1$ und $\dot{\boldsymbol{x}}_3$ parallel zu $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4$. D.h.: die Diagonalen sind konjugierte Durchmesser. Da eine stetige auf einer kompakten Menge definierte Funktion Maximum und Minimum annimmt, erhält man so 2 Paare konjugierter Durchmesser.

Die oben unterschiedenen Fälle a) und b) sind hier durch $\dot{F} \not\equiv 0$ und $\dot{F} \equiv 0$ gekennzeichnet.

§ 3. Beispiele

Die Bereiche, für die in § 2 der Fall b) eintritt, besitzen zu jedem Durchmesser einen konjugierten. Sie sind auch dadurch gekennzeichnet, dass ein kleinstes Umparallelogramm doppelt so grossen Inhalt hat wie ein grösstes Inviereck. Die Randkurven solcher Bereiche nennen wir nach BLASCHKE [1] P-Kurven. Die P-Kurven

mit Mittelpunkt (Symmetriezentrum) werden dort R-Kurven genannt. Sie sind als *Radonsche Kurven* in der Literatur bekannt (nach RADON [9]).

Die einfachsten Beispiele für P- und R-Kurven liefern affin-reguläre *m-Ecke*, und zwar sind die $(2n+1)$-Ecke P-Kurven ohne Mittelpunkt und die $(4n+2)$-Ecke R-Kurven ($n = 1, 2, \ldots$). Dies erkennt man leicht durch einige Winkelberechnungen an den euklidisch-regulären m-Ecken.

Weitere Beispiele für P-Kurven sind die *Gleichdicke* (Orbiformen). Das folgt aus der bekannten Tatsache, dass deren Normalen Doppelnormalen sind.

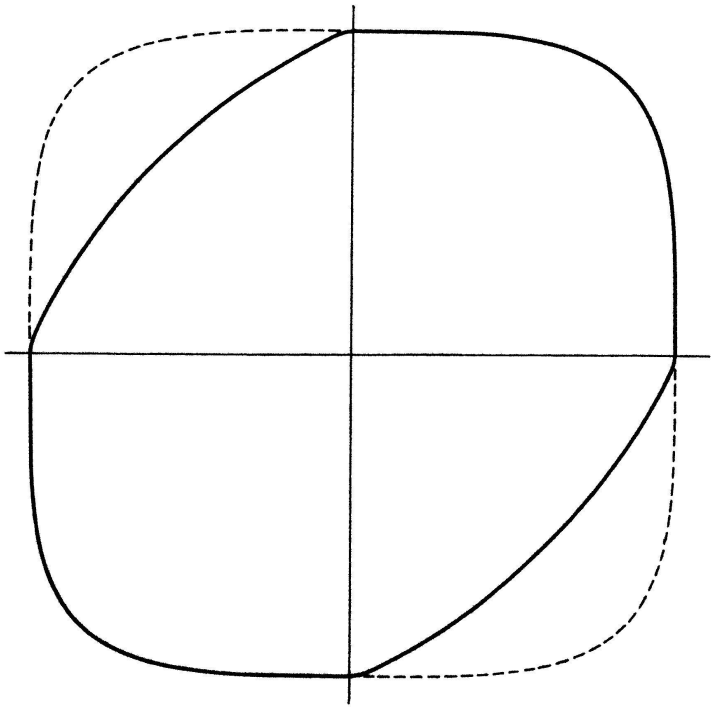
Betrachten wir die Bereiche, die in cartesischen Koordinaten durch

$$|x|^p + |y|^p \leqslant 1\,, \quad p \geqslant 1, \text{ reell}\,, \tag{1}$$

gegeben sind. Für $p = 1$ erhalten wir die Parallelogramme, die nur zwei wesentlich verschiedene Paare konjugierter Durchmesser besitzen. Für $p > 1$, $p \neq 2$ existieren genau zwei Paare. Der Fall $p = 2$, d.h. der Fall der Ellipsen, ist unter den folgenden Bereichen enthalten:

$$\begin{array}{ll} |x|^p + |y|^p \leqslant 1 \quad \text{für} \quad x\,y \geqslant 0 & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \\ p > 1 \end{array} \right. \\ |x|^q + |y|^q \leqslant 1 \quad \text{für} \quad x\,y \leqslant 0 & \end{array} \tag{2}$$

Die Ränder dieser Bereiche sind R-Kurven, einschliesslich des Grenzfalles $p = 1$, $q = \infty$, der das affin-reguläre Sechseck angibt. Dass durch (2) R-Kurven gegeben sind, folgt aus der von RADON [9] angegebenen Erzeugung der R-Kurven mittels einer Polarität aus einem «Viertelbogen» (siehe auch BLASCHKE [1] und LENZ [7]) und aus der Polarität der in (2) angegebenen Viertelbögen (siehe SALMON [11], Artikel 91). Dann sieht man auch leicht, dass die Bereiche (1) nur zwei Paare konjugierter Durchmesser besitzen.



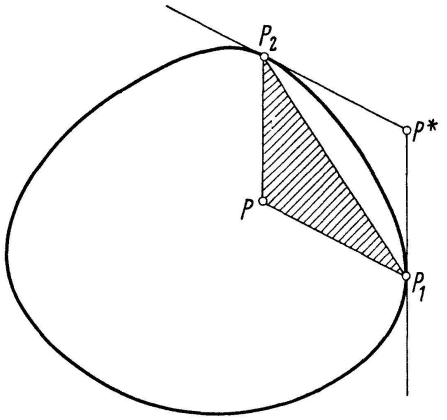
$x^4 + y^4 = 1$ für $x\,y \geqslant 0$
$|x|^{4/3} + |y|^{4/3} = 1$ für $x\,y \leqslant 0$

Figur 3

§ 4. Ergänzungen und Anwendungen

1. Stützparallelogramme. Ist P ein innerer Punkt des konvexen Bereiches B, so können wir die folgende Schar φ von Dreiecken betrachten: Zu allen Randpunkten P_1 werden die Dreiecke mit der Basis PP_1 gebildet, die in B und links von PP_1 liegen und grösstmöglichen Inhalt haben. Der Inhalt $\alpha(P_1)$ ist eine stetige Funktion von P_1, und es gibt daher Dreiecke in φ, für die α maximal bzw. minimal ist.

STEIN [12] und LAUGWITZ [6] haben «*Stützparallelogramme*» relativ zu P betrachtet und gezeigt, dass es stets zwei verschiedene gibt. Ein Parallelogramm $PP_1P^*P_2$ heisst Stützparallelogramm zu P, wenn $P_1, P_2 \in \partial B$ und die Seiten P_1P^*, P^*P_2 auf Stützgeraden liegen.



Figur 4

Behauptung 4: *Es gibt ein kleinstes und ein grösstes Dreieck in φ, die sich zu Stützparallelogrammen ergänzen lassen.*

Hieraus folgt dann der Satz von STEIN und LAUGWITZ. Wir skizzieren den Beweis. Zunächst ist klar, dass es für jedes Dreieck aus φ eine Stützgerade in P_2 gibt, die parallel zu PP_1 ist. Zu zeigen bleibt also, dass es ein kleinstes und ein grösstes Dreieck in φ gibt, so dass in P_1 jeweils eine zu PP_2 parallele Stützgerade existiert. Die absolut grössten Dreiecke mit der Ecke P, die in B liegen, gehören zu φ. Da für sie die gewünschte Eigenschaft vorhanden ist, brauchen nur noch die kleinsten Dreiecke aus φ betrachtet zu werden. Sei PP_1P_2 ein kleinstes Dreieck aus φ und nehmen wir an, dass es in P_1 keine zu PP_2 parallele Stützgerade gibt und dass das für alle anderen (möglicherweise vorhandenen) Dreiecke aus φ mit der Basis PP_1 gilt. Bewegt man nun den Punkt P_1 auf ∂B nicht zu weit in Richtung des Schnittpunktes der Geraden PP_2 mit den Stützgeraden in P_1, so verkleinert sich der Dreiecksinhalt α echt, wie man nach einigen einfachen Schlüssen erkennt. Damit ist dann Behauptung 4 bewiesen.

Der Kreis, in dem P nicht Mittelpunkt ist, zeigt, dass es genau 2 Stützparallelogramme geben kann. Ist P Schnittpunkt konjugierter Durchmesser, so gibt es offenbar 4 Stützparallelogramme.

Stützparallelogramme und allgemeiner Stützparallelepipede wurden von TAYLOR [13] in der Minkowski-Geometrie betrachtet. Sie liefern orthogonale Basen. Auch die Funktion α spielt in der Minkowski-Geometrie eine gewisse Rolle, vgl. PETTY [8].

2. Eine Kennzeichnung der Radonschen Kurven. Sei V_1 ein grösstes Inviereck, W_1 ein kleinstes Umparallelogramm und W_2 ein kleinstes Umviereck, die Inhalte seien mit $|V_1|$ usw. bezeichnet. Die Kennzeichnung der P-Kurven, die sich oben ergeben

hat, kann man nach LENZ [7] auch in der folgenden Form angeben:

$$2\,|V_1| \geqslant |W_1|;\ \text{Gleichheit genau für } P\text{-Kurven.}$$

Für R-Kurven gilt, wie LENZ vermutet hat, eine entsprechende Kennzeichnung:

$$2\,|V_1| \geqslant |W_2|;\ \text{Gleichheit genau für } R\text{-Kurven.} \tag{3}$$

LENZ hat gezeigt, dass Gleichheit höchstens für Mittelpunkts-P-Kurven, also für R-Kurven eintreten kann, wobei er allerdings Eckenfreiheit voraussetzt. Gleichheit tritt für alle R-Linien ein, wenn die kleinsten Umparallelogramme zugleich kleinste Umvierecke sind. Dies ist in der Tat der Fall. Denn DOWKER [2] hat gezeigt, dass unter den kleinsten umschriebenen $2\,n$-Ecken eines konvexen Mittelpunktsbereiches stets eins mit demselben Mittelpunkt ist. (Hierzu auch PETTY [8], S. 276, und Nr. 3 dieses Paragraphen.) Weitere Ungleichungen zwischen $|V_1|$, $|W_1|$, $|W_2|$ und $|B|$ findet man bei LENZ [7].

3. Dualität. In den Überlegungen der §§ 2, 3 zeigt sich eine gewisse Dualität zwischen grössten Invierecken und kleinsten Umparallelogrammen. Nun lässt sich zwar der Inhaltsbegriff i. allg. keinem Dualitätsprinzip einordnen. Wir werden jedoch zeigen, dass für konvexe Bereiche mit Mittelpunkt M eine vollkommene Dualität zwischen grössten In- und kleinsten Umparallelogrammen besteht. Die Einschränkung auf Parallelogramme ist hier unwesentlich, weil es nach der schon genannten Arbeit von DOWKER [2] unter den kleinsten Umvierecken ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M gibt und unter den grössten Invierecken ebenfalls. Das erste folgt auch mittels Behauptung 5 aus dem zweiten, das zweite ist direkt einfach einzusehen. Denn von einem grössten Inviereck ausgehend, dessen Diagonalen nach § 2 konjugierte Durchmesser sind, findet man ein gleichgrosses Inviereck, dessen Diagonalen durch M gehen und das daher selbst den Mittelpunkt M hat.

Die Dualität wird durch Polarität an einer Ellipse mit Mittelpunkt M vermittelt, die wie üblich Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt. Der Rand ∂B als Punkt- bzw. Stützgeradenmenge wird dann in eine Stützgeraden- bzw. Punktmenge übergeführt, die wieder einen konvexen Bereich B^* begrenzt. Parallele Geraden werden in Punkte einer Geraden durch M abgebildet und umgekehrt. Daraus folgt: Ein Umparallelogramm von B mit zugehörigen konjugierten Durchmessern durch M wird in ein Inparallelelogramm von B^* mit konjugierten Durchmessern durch M abgebildet und umgekehrt.

Behauptung 5: *Ein kleinstes Umparallelogramm eines konvexen Bereiches B mit Mittelpunkt M wird durch eine Polarität bezüglich M in ein grösstes Inparallelogramm von B^* abgebildet und umgekehrt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass für ein Parallelogramm V mit Mittelpunkt M und sein polares Parallelogramm V^* stets $|V|\,|V^*| = 8$ gilt, wenn die Ellipse, die die Polarität bestimmt, den Inhalt π hat. Denn man überlegt sich leicht, dass dann $|V|\,|V^*|$ stets denselben Wert hat. Die Zahl 8 ergibt sich etwa als Produkt der Inhalte von In- und Umquadrat des Einheitskreises. Ist nun V_1 ein grösstes Inparallelogramm von B und V_2^* ein kleinstes Umparallelogramm von B^*, so gilt für $V_2^{**} = V_2$

$$|V_2| \leqslant |V_1|\,, \qquad |V_2^*| \leqslant |V_1^*|$$

und

$$8 = |V_2|\,|V_2^*| \leqslant |V_1|\,|V_2^*| \leqslant |V_1|\,|V_1^*| = 8\,,$$

also

$$|V_2| = |V_1|\,, \quad |V_2^*| = |V_1^*|\,,$$

was zu zeigen war.

4. Anwendungen. Die in der Einleitung erwähnten Arbeiten von FUNK [3] und LAUGWITZ [5] benutzen konjugierte Durchmesser, um Aufgaben der Finsler- bzw. Minkowski-Geometrie zu lösen. Oben haben wir schon das Auftreten der Funktion α in der Minkowski-Geometrie erwähnt. RADON [10] benutzt konjugierte Durchmesser, um eine gegebene konvexe Kurve in einem Koordinatensystem einfach darzustellen. Damit wird eine Aufgabe aus der zentralaffinen Differentialgeometrie gelöst (hierzu auch HEIL [4]).

5. Weiterführungen. Unsere Untersuchungen lassen sich in verschiedenen Richtungen weiterführen. So legt das grösste einbeschriebene Viereck auch bei beliebigen Jordankurven konjugierte Durchmesser fest. Im Raum kann man an Stelle der Vierecke Oktaeder und Parallelepipede betrachten. Das folgende Ergebnis, auf das wir später zurückzukommen hoffen, steht in engem Zusammenhang mit den bekannten Sätzen von BLASCHKE über Flächen mit ebenen Selbstschattengrenzen und Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalität (siehe z. B. BLASCHKE [1]):

Sei B eine beschränkte, abgeschlossene konvexe Menge mit Mittelpunkt. Liegen die Ecken eines grössten B einbeschriebenen Oktaeders auf den Seitenflächen eines kleinsten B umschriebenen Parallelepipeds, dann ist B ein Ellipsoid.

E. HEIL und W. KRAUTWALD, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. BLASCHKE, *Zur Affingeometrie der Eilinien und Eiflächen*, Math. Nachrichten *15*, 258–264 (1956).
[2] C. H. DOWKER, *On Minimum Circumscribed Polygons*, Bull. Amer. Math. Soc. *50*, 120–122 (1944).
[3] P. FUNK, *Über den Begriff extremale Krümmung und eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse*, Math. Zschr. *3*, 87–92 (1919).
[4] E. HEIL, *Abschätzungen für einige Affininvarianten konvexer Kurven*, Monatsh. Math. *71*, 405–423 (1967).
[5] D. LAUGWITZ, *Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Räume*, Math. Zschr. *61*, 235–244 (1954).
[6] D. LAUGWITZ, *Eine Bemerkung über konvexe Kurven*, Math. Zschr. *70*, 463–464 (1959).
[7] H. LENZ, *Die Eilinien mit einer Schar konjugierter Durchmesser*, Arch. Math. *9*, 134–139 (1958).
[8] C. M. PETTY, *On the Geometry of the Minkowski Plane*, Riv. Mat. Univ. Parma *6*, 269–292 (1955).
[9] J. RADON, *Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven*, Ber. Verh. Königl. Sächs. Ges. Wiss., Math.-Phys. Kl. *68*, 123–128 (1916).
[10] J. RADON, *Lösung einer von S. Golab gestellten Aufgabe*, Jahresb. DMV *44*, 22 (1934).
[11] G. SALMON, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 2. Aufl., Leipzig 1882.
[12] S. K. STEIN, *A Continuous Mapping Defined by a Convex Curve*, Math. Zschr. *68*, 282–283 (1957). Addendum: Math. Zschr. *70*, 465 (1959).
[13] A. E. TAYLOR, *A Geometric Theorem and its Applications to Biorthogonal Systems*, Bull. Amer. Math. Soc. *53*, 614–616 (1947).