Diagonalen im regulären n-Eck

Autor(en): **Harborth, Heiko**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26651

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Diagonalen im regulären n-Eck

Zeichnet man in einem konvexen n-Eck alle möglichen Diagonalen, so kann man nach den Anzahlen der entstehenden Teilflächen $F(n)$, der Seitenlinien $K(n)$ und der Eckpunkte $E(n)$ fragen (vgl. [1, 2]). Es soll dabei berücksichtigt werden, dass sich mehr als zwei Diagonalen in nur einem Punkt schneiden können.

Bedeutet $E_\nu(n)$ die Anzahl der Punkte, in denen sich genau ν Diagonalen schneiden, so folgt

$$E(n) = n + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n) \,. \tag{1}$$

Mit $F_\nu(n)$ als der Anzahl von ν-Ecken ergibt sich auf zwei Arten die Summe aller Ecken der Teilvielecke

$$\sum_{\nu=3}^{n} \nu\, F_\nu(n) = n\,(n-2) + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} 2\,\nu\, E_\nu(n) \,. \tag{2}$$

Die Winkelsumme aller Teile berechnet sich ebenfalls auf zwei Arten zu

$$\pi \sum_{\nu=3}^{n} (\nu - 2)\, F_\nu(n) = (n-2)\,\pi + 2\pi \sum_{\nu=2}^{[n/2]} E_\nu(n) \,. \tag{3}$$

Mit (2) und (3) folgt

$$F(n) = \sum_{\nu=3}^{n} F_\nu(n) = \binom{n-1}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} (\nu - 1)\, E_\nu(n) \,. \tag{4}$$

Für $K(n)$ gilt

$$2\,K(n) = n + \sum_{\nu=3}^{n} \nu\, F_\nu(n) \,, \tag{5}$$

mit (2) also

$$K(n) = \binom{n}{2} + \sum_{\nu=2}^{[n/2]} \nu\, E_\nu(n) \,. \tag{6}$$

Im weiteren sollen nur reguläre n-Ecke betrachtet werden. Ist n eine Primzahl bzw. eine ungerade Zahl, so wird in [3] bzw. [4] gezeigt, dass ausser den Eckpunkten keine Schnittpunkte von drei oder mehr Diagonalen auftreten. Da zu je vier der n Eckpunkte genau ein Diagonalschnittpunkt gehört und umgekehrt, und da man aus n Ecken auf $\binom{n}{4}$ verschiedene Arten vier auswählen kann, folgt für reguläre n-Ecke mit $n \equiv 1 \pmod 2$

$$E(n) = n + \binom{n}{4}; \quad F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4}; \quad K(n) = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}. \tag{7}$$

Ist $n \equiv 0 \pmod 2$, so werden die Anzahlen für $n \geqq 6$ kleiner; dann gilt nämlich wegen des Mittelpunktes

$$E_{n/2}(n) = 1 \,, \tag{8}$$

und, da sich die $n/2$ Diagonalen in $\binom{n/2}{2}$ Punkten schneiden könnten, folgt

$$E_2(n) \leqslant \binom{n}{4} - \frac{n\,(n-2)}{8}. \tag{9}$$

Für gerades n mit $(n, 3) = 1$ soll nun die Anzahl von Diagonalschnittpunkten exakt bestimmt werden.

Die Lösungen von $w^n - 1 = 0$ in der komplexen Zahlenebene seien die Eckpunkte des regulären n-Ecks. Jede primitive n-te Einheitswurzel erzeugt alle übrigen durch Potenzieren. Seien a, b, c, d, g, h ganze Zahlen modulo n und $z = \exp(2\pi i/n)$, so sind drei beliebige Diagonalen durch

$$\begin{aligned} (a, b)&: \quad w = u + i\,v = z^a + t_1\,(z^b - z^a)\,, \\ (c, d)&: \quad w = u + i\,v = z^c + t_2\,(z^d - z^c)\,, \\ (g, h)&: \quad w = u + i\,v = z^g + t_3\,(z^h - z^g) \end{aligned} \tag{10}$$

dargestellt. Durch Addition und Subtraktion des konjugiert Komplexen lassen sich die reellen Parameter t_1, t_2, t_3 eliminieren. Als notwendige und hinreichende Bedingung für einen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Diagonalen ergibt sich dann

$$\frac{2\,(z^b - z^a)\,(z^d - z^c)\,(z^h - z^g)}{z^{a+b}\,z^{c+d}\,z^{g+h}} \begin{vmatrix} 1 & z^{a+b} & z^a + z^b \\ 1 & z^{c+d} & z^c + z^d \\ 1 & z^{g+h} & z^g + z^h \end{vmatrix} = 0\,. \tag{11}$$

Wegen $a \neq b$, $c \neq d$, $g \neq h$ muss die Determinante $D(z)$ verschwinden. Wird o. E. d. A. $g = 0$ gesetzt, so muss mit $D(z) = z^h\,A(z)$ gelten

$$A(z) = (1 - z^c)\,(1 - z^d)\,(1 - z^{a+b-h}) - (1 - z^a)\,(1 - z^b)\,(1 - z^{c+d-h}) = 0\,. \tag{12}$$

Da $(n, 3) = 1$, ist z^3 primitive n-te Einheitswurzel und daher muss auch $A(z^3) = 0$ erfüllt sein. Aus

$$\begin{aligned} A(z^3) &- (1 + z^c + z^{2c})\,(1 + z^d + z^{2d})\,(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)})\,A(z) \\ &= (1 - z^a)\,(1 - z^b)\,(1 - z^{c+d-h})\,B(z) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

folgt

$$\begin{aligned} B(z) &= (1 + z^c + z^{2c})\,(1 + z^d + z^{2d})\,(1 + z^{a+b-h} + z^{2(a+b-h)}) \\ &\quad - (1 + z^a + z^{2a})\,(1 + z^b + z^{2b})\,(1 + z^{c+d-h} + z^{2(c+d-h)}) = 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

weil für $a = 0$ oder $b = 0$ der Schnittpunkt Eckpunkt ist, und für $c + d = h$ die Diagonalen (c, d) und $(0, h)$ parallel sind, sich also nicht schneiden. Es folgt

$$\begin{aligned} &2\,B(z) + A^2(z) + 2\,(1 - z^a)\,(1 - z^b)\,(1 - z^{c+d-h})\,A(z) \\ &\quad + 3\,(z^a + z^b + z^{c+d-h} + z^c + z^d + z^{a+b-h})\,A(z) = 3\,C_1(z)\,C_2(z) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

mit

$$C_1(z) = z^{c+d} + (z^c + z^d)\,z^{a+b-h} - z^{a+b} - (z^a + z^b)\,z^{c+d-h}\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} C_2(z) &= z^c + z^d + z^{a+b-h}\,(1 + z^c + z^d) + z^a + z^b + z^{c+d-h}\,(1 + z^a + z^b) \\ &\quad + z^{c+d} + z^{a+b}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Wenn $C_1(z) = 0$, dann muss auch

$$C_1(z)\,(1 + z^h) - z^h\,A(z) = -\,z^{-h}\,M_1(z) = 0\,, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} M_1(z) &= (z^a + z^b)\,(z^{2h} + z^{c+d}) - (z^c + z^d)\,(z^{2h} + z^{a+b}) \\ &= (z^b - z^c)\,(z^{2h} - z^{a+d}) - (z^d - z^a)\,(z^{2h} - z^{b+c}) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

und wegen $(n, 3) = 1$

$$\begin{aligned} &M_1(z^3) - (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b})\,(z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h})\,M_1(z) \\ &\quad = (z^c + z^d)\,(z^{2h} + z^{a+b})\,N_1(z) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

mit

$$\begin{aligned} N_1(z) &= (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b})\,(z^{4h} + z^{2(c+d)} - z^{c+d+2h}) \\ &\quad - (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d})\,(z^{4h} + z^{2(a+b)} - z^{a+b+2h}) \end{aligned} \tag{21}$$

erfüllt sein. $z^c + z^d = 0$ und $M_1(z) = 0$ haben $c = d + (n/2)$ und $a = b + (n/2)$, also den Mittelpunkt des n-Ecks, oder $c = d + (n/2)$ und $2\,h + (n/2) = c + d$, also $h = d$ bzw. $h = c$ und damit einen Eckpunkt, als Schnittpunkt zur Folge. Entsprechend folgt aus $z^{2h} + z^{a+b} = 0$ und $M_1(z) = 0$ ein Eckpunkt ($h = b$ bzw. $h = a$) oder zwei parallele Diagonalen ($a + b = c + d$). Der dritte Faktor in (20) $N_1(z) = 0$ ergibt nun auch

$$\begin{aligned} &2\,N_1(z) + M_1^2(z) + 2\,(z^c + z^d)\,(z^{2h} + z^{a+b})\,M_1(z) - 3\,(z^b + z^c)\,(z^{2h} + z^{a+d})\,M_1(z) \\ &\quad = 3\,(z^d - z^a)\,(z^{2h} - z^{b+c})\,P_1(z) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

mit

$$P_1(z) = (z^b + z^c)\,(z^{2h} + z^{a+d}) - (z^d + z^a)\,(z^{2h} + z^{b+c})\,. \tag{23}$$

In (22) bedeutet $z^d - z^a = 0$ wiederum einen Eckpunkt ($a = d$). Aus $z^{2h} - z^{b+c} = 0$ und $M_1(z) = 0$ folgt entweder $b = c$ (Eckpunkt) oder $2\,h = a + d = b + c$. Die letzten beiden Beziehungen in $A(z) = 0$ eingesetzt ergibt (vgl. (12))

$$A(z) = z^{-(h+c+d)}\,(z^h - z^c)\,(z^h - z^d)\,(z^{c+d} - z^{2h})\,(1 + z^h) = 0\,. \tag{24}$$

Die ersten drei Differenzen bedingen Eckpunkte ($h = c$, $h = d$, $b = d$) und aus $1 + z^h = 0$ folgt $h = n/2$, so dass in diesem Fall Schnittpunkte von drei Diagonalen vorliegen:

$$g = 0;\quad h = n/2;\quad a = -\,d;\quad b = -\,c\,. \tag{25}$$

Mit $P_1(z) = 0$ aus (22) wird schliesslich noch

$$P_1(z) + M_1(z) = -\,2\,(z^d - z^b)\,(z^{2h} - z^{a+c}) = 0\,. \tag{26}$$

Diese Differenzen entsprechen denjenigen in (22), wenn man bedenkt, dass $A(z)$ in a und b symmetrisch ist.

Aus $C_2(z) = 0$ wird nun in analoger Weise gefolgert:

$$(z^{a+b} - z^{c+d})\,C_2(z) + (z^{a+b} + z^{c+d})\,A(z) = 2\,z^{-h}\,M_2(z) = 0\,, \tag{27}$$

$$M_2(z) = (z^a + z^b)\,(z^{a+b+h} - z^{2(c+d)}) - (z^c + z^d)\,(z^{c+d+h} - z^{2(a+b)})$$

$$= (z^h + z^{b+c})\,(z^{2a+b} - z^{c+2d}) - (z^h + z^{a+d})\,(z^{2c+d} - z^{a+2b}) = 0\,, \tag{28}$$

$$M_2(z^3) - (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b})\,(z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h})\,M_2(z)$$

$$= (z^c + z^d)\,(z^{c+d+h} - z^{2(a+b)})\,N_2(z) = 0\,, \tag{29}$$

$$N_2(z) = (z^{2a} + z^{2b} - z^{a+b})\,(z^{2(a+b+h)} + z^{4(c+d)} + z^{a+b+2(c+d)+h})$$

$$- (z^{2c} + z^{2d} - z^{c+d})\,(z^{2(c+d+h)} + z^{4(a+b)} + z^{2(a+b)+c+d+h})\,. \tag{30}$$

In (29) ergibt $z^c + z^d = 0$ mit $M_2(z) = 0$ entweder den Mittelpunkt ($c = d + (n/2)$, $a = b + (n/2)$) oder $c = d + (n/2)$ und $a + b + h = 2\,(c + d)$, woraus durch Einsetzen in (12)

$$A(z) = (z^{2d-h} - z^a)\,(z^{2d-a} - 1)\,(z^{2d-h} + 1) = 0 \tag{31}$$

folgt. In (31) ergeben sich aus den ersten beiden Faktoren mit $a - d = d - h$, $d - b = -d$, $c = d + (n/2)$ bzw. $d - a = -d$, $b - d = d - h$, $c = d + (n/2)$ zwei Fälle von Schnittpunkten, die sich durch Umbenennung der Diagonalen (a, b), (b, c), $(0, h)$ in $(c' - a', d' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ bzw. in $(d' - a', c' - a')$, $(h' - a', -a')$, $(0, b' - a')$ als in (25) enthalten erweisen. Ist der dritte Faktor in (31) Null, so sind wegen $a + b = 2\,(c + d) - h = 4\,d - h = h$ die Diagonalen (a, b) und $(0, h)$ parallel.

Aus dem zweiten Faktor von (29) $z^{c+d+h} - z^{2\,(a+b)} = 0$ und $M_2(z) = 0$ wird durch Vertauschen von (a, b) mit (c, d) der mit (31) diskutierte Fall, oder es folgt $h = 2\,(a + b) - (c + d) = 2\,(c + d) - (a + b)$, so dass sich wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$ ergibt (parallele Diagonalen).

Es muss nun nach (29) $N_2(z) = 0$ gelten und damit auch

$$2\,N_2(z) + M_2^2(z) + 2\,(z^c + z^d)\,(z^{c+d+h} - z^{2(a+b)})\,M_2(z)$$

$$- 3\,(z^h - z^{b+c})\,(z^{2a+b} + z^{c+2d})\,M_2(z) = 3\,(z^h + z^{a+d})\,(z^{2c+d} - z^{a+2b})\,P_2(z) \tag{32}$$

mit

$$P_2(z) = (z^h - z^{b+c})\,(z^{2a+b} + z^{c+2d}) - (z^h - z^{a+d})\,(z^{2c+d} + z^{a+2b})\,. \tag{33}$$

Aus $z^h + z^{a+d} = 0$ und $M_2(z) = 0$ ergibt sich entweder $h = a + d + (n/2)$, $h = b + c + (n/2)$ oder $h = a + d + (n/2)$, $2\,a + b = c + 2\,d$. In (12) jeweils eingesetzt ergeben sich die Bedingungen

$$A(z) = z^{-(a+b+h)}\,(1 + z^h)\,(z^h - z^{a+b}) = 0\,, \tag{34}$$

$$A(z) = (z^a - z^d)\,(1 - z^{c-2a})\,(1 + z^{c+d-a}) = 0\,. \tag{35}$$

Gleichung (34) bedingt einmal $h = n/2$, also mit den anderen Beziehungen Schnittpunkte vom Typ (25), und zum anderen $a + b = h$, d.h. parallele Diagonalen. In (35) bedeutet die erste Differenz einen Eckpunkt ($a = d$), während $1 - z^{c-2a} = 0$ Schnittpunkte von drei Diagonalen zur Folge hat:

$$g = 0;\quad h = a + d + (n/2);\quad c = 2\,a;\quad b = 2\,d\,. \tag{36}$$

Der dritte Faktor von (35) $1 + z^{c+d-a} = 0$ ergibt $c = a - d + (n/2)$. Ersetzt man hierin und in $h = a + d + (n/2)$ und $b = d - a + (n/2)$ die Diagonalen (a, b), (c, d) und $(0, h)$ durch $(h' - d', -d')$, $(b' - d', a' - d')$ und $(0, c' - d')$, so erkennt man durch Auflösen nach h', c' und b', dass Schnittpunkte vom Typ (36) vorliegen.

Aus (32) folgt weiter $z^{2c+d} - z^{a+2b} = 0$ und mit $M_2(z) = 0$ ist entweder $2c + d = a + 2b$, $h = b + c + (n/2)$, was sich durch Vertauschen von (a, b) und (c, d) gleich dem durch (35) betrachteten Fall erweist, oder $2c + d = a + 2b$, $2a + b = c + 2d$. Durch Addition folgt $3(a + b) = 3(c + d)$ und wegen $(n, 3) = 1$ $a + b = c + d$, d.h. (a, b) ist parallel (c, d).

Zuletzt wird in (32) noch $P_2(z) = 0$ und daher

$$P_2(z) + M_2(z) = -2\,(z^h + z^{b+d})\,(z^{2c+d} - z^{b+2a}) = 0\,. \tag{37}$$

Durch Vertauschen von a und b ergeben sich die gleichen zu diskutierenden Ausdrücke wie in (32).

Setzt man in (36) $h = n/2$, so zeigt sich, dass (25) in (36) enthalten ist. Es gilt somit der

Satz: *Ist $n \equiv \pm 2 \pmod 6$, so schneiden sich im regulären n-Eck ausser in Eckpunkten und Mittelpunkt höchstens drei Diagonalen in einem Punkt.*

Es werden nun zunächst die Dreifachschnittpunkte gezählt, die (25) erfüllen

$$E_3^{(1)}(n) = n \sum_{a=1}^{[n/4]-1} \sum_{b=a+1}^{(n/2)-a-1} 1 = n \left[\frac{n-4}{4}\right] \left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n+4}{4}\right]\right). \tag{38}$$

Dabei bedeute $[r]$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich r. Die übrigbleibenden Punkte von (36) liegen auf Kreisbögen um z^a mit dem Radius $|z^a - 1|$. Damit kein Punkt doppelt gezählt wird, muss $h = (n/2) + a + d < n/2$ und $d - c = d - 2a > n/2$, also $2a + (n/2) + 1 \leqq d \leqq n - a - 1$ und $1 \leqq a \leqq [(n-4)/6]$ gelten; ausserdem müssen noch $[1/2\,(1 + [(n-4)/6])]$ Punkte abgezogen werden, die für $b - a = 2d - a = n/2$ in (38) schon enthalten sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} E_3^{(2)}(n) &= n \sum_{a=1}^{[(n-4)/6]} \sum_{d=1+2a+(n/2)}^{n-a-1} 1 - n \left[\frac{[(n-4)/6]+1}{2}\right] \\ &= \frac{n}{2}\left[\frac{n-4}{6}\right]\left(n - 2 - 3\left[\frac{n+2}{6}\right]\right) - n\left[\frac{[(n+2)/6]}{2}\right] \end{aligned} \tag{39}$$

und zusammen

$$E_3(n) = E_3^{(1)}(n) + E_3^{(2)}(n)\,. \tag{40}$$

Da drei Geraden sich in drei Punkten schneiden könnten, folgt unter Berücksichtigung von (8) und (9)

$$E_2(n) = \binom{n}{4} - \frac{n\,(n-2)}{8} - 3\,E_3(n)\,. \tag{41}$$

Aus (1), (4), (6) und (40) erhält man nun für $n \equiv \pm 2 \pmod 6$

$$E(n) = n + \binom{n}{4} - \frac{(n+2)\,(n-4)}{8} - 2\,E_3(n)\,, \tag{42}$$

$$F(n) = \binom{n-1}{2} + \binom{n}{4} - \frac{(n-2)(n-4)}{8} - E_3(n)\,, \tag{43}$$

$$K(n) = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} - \frac{n(n-4)}{4} - 3\,E_3(n) \tag{44}$$

mit

$$E_3(n) = \begin{cases} \frac{1}{48}\, n\,(n-2)\,(5\,n-38)\,, & \text{wenn} \quad n \equiv \pm 2 \pmod{12}\,, \\ \frac{1}{48}\, n\,(n-4)\,(5\,n-28)\,, & \text{wenn} \quad n \equiv \pm 4 \pmod{12}\,. \end{cases} \tag{45}$$

Ist $n \equiv 0 \pmod 6$, so sind alle Punkte aus (25) und (36) Schnittpunkte von mindestens drei Diagonalen. Für $n > 6$ treten Schnittpunkte von mehr als drei Diagonalen auf, wie sich zum Beispiel durch Einsetzen von $a = 1$, $b = (2\,n/3) - 1$, $c = 3$, $d = (5\,n/6) - 1$ und $h = n/2$ in (12) und Beachten von (25) zeigt. (42), (43) und (44) mit $E_3(n)$ aus (40) stellen also für diese regulären n-Ecke echte obere Schranken dar.

HEIKO HARBORTH, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. GENTILE, *Punti diagonali e poligoni di divisione di un n-gono piano convesso*, Boll. Mat. (4) *1*, 71–74 (1940).
[2] Z. SCHNEIDER und B. STANKOVITSCH, *Über die Anzahl und Anordnung der Diagonalschnitte in einem regelmässigen n-Eck*, El. Math. *14*, 6–11 (1959).
[3] H. T. CROFT and M. FOWLER, *On a Problem of Steinhaus About Polygons*, Proc. Cambridge philos. Soc. *57*, 686–688 (1961).
[4] H. HEINEKEN, *Regelmässige Vielecke und ihre Diagonalen*, L'Enseignement math., II. sér. *8*, 275–278 (1962).

Bei der Korrektur: Herr Dr. H. HEINEKEN teilte mir inzwischen mit, daß eine Arbeit von ihm zum gleichen Thema in den Rendiconti Sem. U. Padova erscheinen wird.

Kleine Mitteilungen

Ein einfacher Beweis der Stirlingschen Formel

Die bekannte Stirlingsche Formel, welche $n\,!$ durch eine geeignete einfache Funktion von n abschätzt, soll hier aus zwei sehr elementaren Hilfssätzen (vgl. [1]) hergeleitet werden.

Hilfssatz 1. Für $x > 0$ gilt $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+0,5}$.

Beweis. Es ist

$$e^{1/(x+0,5)} = 1 + \frac{1}{x+0,5} + \frac{1}{2\,(x+0,5)^2} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu\,!}\,\frac{1}{(x+0,5)^\nu} < 1 + \frac{2\,(x+0,5)+1}{2\,(x+0,5)^2}$$

$$+ \frac{1}{6\,(x+0,5)^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j\,(x+0,5)^j} = 1 + \frac{1}{x} \cdot \frac{6\,x^2 + 7,5\,x + 2,5}{6\,x^2 + 7,5\,x + 3 + (3/8\,x)} < 1 + \frac{1}{x}\,. \tag{1}$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$n\,!\,e^n\,n^{-n-0,5} = \gamma_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{2}$$