Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 581. Man beweise: Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist genau dann Primzahl, wenn $\binom{n}{p} \equiv 1 \pmod{p}$ für alle natürlichen Zahlen n mit $p \leqslant n < 2p$.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Lösung: 1. Wenn $1 \leqq q \leqq p - 1$, p Primzahl, so hat man

$$(p + q)(p + q - 1) \ldots (p + 1) \equiv q! \pmod{p} .$$

Wegen $(q!, p) = 1$ kann man hier mit $q!$ teilen und bekommt

$$\binom{p + q}{p} \equiv 1 \pmod{p} .$$

2. Wir setzen nun $n = p^r q$, $p \nmid q$, p Primzahl, $p < n$. Dann ist

$$\binom{n + p}{n} = \binom{n + p}{p} = (p^{r-1} q + 1) \binom{n + p - 1}{p - 1} .$$

Ganz wie oben schliesst man, dass

$$\binom{n + p - 1}{p - 1} \equiv 1 \pmod{p^r}$$

und daher

$$\binom{n + p}{n} \equiv p^{r-1} q + 1 \pmod{p^r} .$$

Wäre nun $\binom{n + p}{n} \equiv 1 \pmod{n}$, so wäre auch $\binom{n + p}{n} \equiv 1 \pmod{p^r}$, also $p^{r-1} q + 1 \equiv 1 \pmod{p^r}$ und daher $p \mid q$, im Gegensatz zur Voraussetzung. Somit ist $\binom{n + p}{n} \not\equiv 1 \pmod{n}$ und der Beweis ist beendet.

A. BAGER, Hjørring/Dänemark

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Duke University, USA), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), H. MEILI (Winterthur), H. MEYER (Birkerød, Dänemark), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. VELJAN (Zagreb).

Aufgabe 582. Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kreise mit Radius R und mit dem Mittelpunkt auf einer festen Geraden.

T. KOETSIER, Delft

Lösung: Da die Tangente in jedem Punkt einer solchen Trajektorie durch den Mittelpunkt des zu ihr normalen Kreises geht, und da diese Mittelpunkte auf einer festen Geraden liegen, ist jede Kurve eine Traktrix mit der Zentralen der Kreisschar als Leitlinie und der konstanten Tangentenstrecke R.

I. PAASCHE (München) sandte 17 Lösungen und Literaturhinweise, von denen einige auch von anderen Lesern mitgeteilt wurden.

Aufgabe 583. Man beweise: Der Rauminhalt eines Tetraeders beträgt nicht mehr als $\sqrt{2}/12$ der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Kanten.

D. VOICULESCU, Bukarest

Lösung: Von den Kanten a_i des Tetraeders T sind je zwei, die einander gegenüberliegen, Diagonalen in Gegenflächen des T umschriebenen Parallelepipeds. Die Gegenkanten a_j und a_k von T bilden den Winkel α_i und haben den Abstand d_i. Dann ist das Volumen von T gegeben durch

$$V = \frac{1}{6} d_i a_j a_k \sin \alpha_i .$$

Damit ergibt sich

$$V^3 = \frac{1}{216}\left(\prod_{i=1}^{3} d_i \sin\alpha_i\right)\left(\prod_{i=1}^{6} a_i\right) \leqq \frac{1}{216}\left(\prod_{i=1}^{3} d_i\right)\left(\prod_{i=1}^{6} a_i\right) \leqq \frac{3\,V}{216}\prod_{i=1}^{6} a_i\,,$$

womit die Behauptung verifiziert ist. In der ersten Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn P rhomboedrisch ist, in der zweiten nur, wenn T regulär ist.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Eine weitere Lösung sandte D. VELJAN (Zagreb).

Aufgabe 584. Man beweise: Für einen beliebigen Punkt eines sphärischen Dreiecks (auf der Einheitskugel) mit Seiten $\leqslant \pi/2$ ist die Summe der (sphärischen) Eckenabstände höchstens gleich der Summe der beiden grösseren Dreiecksseiten. G. WEGNER, Göttingen

Lösung des Aufgabenstellers: Die Ungleichung ist trivial, wenn der beliebige Punkt P ein Randpunkt des Dreiecks ist (wobei dann das Gleichheitszeichen eintreten kann). Es sei daher im folgenden P ein innerer Punkt des Dreiecks.

Hilfssatz: Im sphärischen Dreieck ABC mit den Seiten $\leqq \pi/2$ sei $\gamma \geqq 120°$. Dann ist $a + b < c + h_c$.

Beweis: Wir wählen D zwischen A und B so, dass $|AC| = |AD|$ ist und E zwischen B und C so, dass $|BD| = |BE|$. Wir definieren α' und β' durch $90° - (\alpha'/2) := \sphericalangle ADC$, $90° - (\beta'/2) := \sphericalangle BDE$. Wegen des sphärischen Exzesses ist $\sphericalangle ADC > 90° - (\alpha/2)$, $\sphericalangle BDE > 90° - (\beta/2)$, also $\alpha' \leqq \alpha$ und $\beta' \leqq \beta$. Ist $x := |EC| = a + b - c$, so folgt nach leichter Rechnung

$$\frac{\sin x}{\sin h_c} = \operatorname{tg}\frac{\alpha' + \beta'}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta'}{2}\right).$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ergibt sich, wenn $\alpha' + \beta' \leqq 90°$. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Ungleichung durch Bestimmung des Minimums von $\cos(\alpha + \beta)$ unter der Nebenbedingung $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$, $\gamma \geqq 120°$, $c \leqq \pi/2$ und fest. Es ergibt sich $\alpha = \beta$ und $\alpha = \beta \leqq 45°$, also $\alpha' + \beta' \leqq 90°$.

r_A und r_B seien die Abstände des inneren Punktes P von A und B. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sphericalangle APB \geqq 120°$ und $b \geqq a$. Aus dem Hilfssatz folgt $r_A + r_B < c + h_c$. Trifft der Bogen PC den Bogen AB in E, so gilt $h_c \leqq |EP|$ und $|EC| \leqq b$. Hieraus folgt $r_A + r_B + r_C \leqq c + h_c + r_C \leqq c + |EP| + r_C \leqq c + b$, w.z.b.w.

Neue Aufgaben

Aufgabe 606. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von drei linear unabhängigen periodischen Lösungen von

$$x''' - \frac{p'}{p}x'' + (1 + p^2)\,x' - \frac{p'}{p}x = 0\,, \qquad p\,(t + \omega) = p(t)\,, \qquad p(t) \neq 0$$

ist

$$\int_0^{\omega} \sqrt{1 + p^2}\,dt > 2\,\pi\,.$$

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute of Brooklyn

Aufgabe 607. Sind X und Y Teilmengen einer Menge M, so definieren wir $X + Y$ durch $X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$, d.h. $X + Y$ besteht aus all den Elementen von M, die in X oder Y jedoch nicht im Durchschnitt von X und Y liegen. Es sei nun M eine endliche Menge mit $|M| = n$ Elementen. Ferner sei k eine gerade ganze Zahl mit $2 \leqslant k \leqslant n - 1$. Zeige: Es gibt $n - 1$ Teilmengen $B_1, \ldots, B_{n-1}$ von M mit den Eigenschaften: a) $|B_i| = k$ für $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. b) Ist $X \subseteq M$ und ist $|X|$ gerade, so gibt es eine eindeutig bestimmte Teilmenge I von $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$ mit $X = \sum_{i \in I} B_i$.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 608. Unter Verwendung von Kollineationen konstruiere man eine Parabel durch vier gegebene Punkte (ohne Verwendung einer Involution). K. PRACHAR, Wien

Aufgabe 609. In der Gauss'schen Zahlenebene werde dem «Punkt» $z = x + i\,y$ der Punkt

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z - \alpha}, \quad \gamma \neq 0; \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ komplexe Zahlen}$$

zugeordnet. Welches ist die Bahn eines variablen Punktes, dessen Bewegung in jedem Moment auf den jeweils zugeordneten Punkt hin gerichtet ist?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Literaturüberschau

Lesebuch zur Mathematik (Quellen von Euklid bis heute). Von J. J. BURCKHARDT. 79 Seiten mit 34 Figuren. Fr. 13.80. Räber-Verlag, Luzern und Stuttgart 1968.

Die Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts widmen sich in erster Linie aktuellen Fragen der Unterrichtsgestaltung.

Das «Lesebuch zur Mathematik», als Heft 5 erschienen, nimmt eine gewisse Sonderstellung ein. Anhand sorgfältig ausgesuchter Quellen wird dem Leser mathematisches Ideengut in möglichst originaler Form vermittelt. Koryphäen wie Euklid, Euler, Gauss und Hilbert kommen dabei zu Wort, und der geniale John von Neumann spricht im XVII. Kapitel in fast unüberbietbarer Weise über das Wesen mathematischer Forschung. Ein Stück Geschichte der Mathematik wird so auf unkonventionelle und lebendige Weise vorgetragen.

Wir stehen in einer Zeit des Umbruchs und sprechen von «moderner» Mathematik. Um diese aber wirklich verstehen zu können, muss die geschichtliche Entwicklung mit einbezogen werden. Das genannte Lesebuch schliesst damit eine seit langem (zumindest was die Mittelschule betrifft) bestehende Lücke. Die 18 originalen Kurzabhandlungen dienen der mathematischen «Allgemeinbildung» vortrefflich. Eine Flut hochspezialisierter Fachpublikationen ergiesst sich heutzutage über jeden Mathematiker. Um so mehr tut es Not, in mathematischen Mussestunden seinen Horizont zu erweitern. Das in ansprechender Form gedruckte Büchlein sollte zumindest in keiner Fachbibliothek eines Mathematiklehrers fehlen; denn für ihn und die ihm anvertrauten Klassen bieten sich ideale Ansatzpunkte und Impulse zu Querverbindungen mit andern Fächern. Aber auch dem Mathematiker schlechthin kann das Studium einzelner Abhandlungen (z.B. der Aufgabe über kollineare Punkte) Schönheit und Eleganz mathematischer Denkweise vor Augen führen.

HANS LOEFFEL

A History of Vector Analysis. Von MICHAEL J. CROWE. 270 Seiten. $ 12.95. University of Notre Dame Press, Notre Dame, London 1967.

In diesem interessanten Buch wird die Entwicklung der Idee eines vektoriellen Systems in drei Perioden eingeteilt. Die erste Periode beginnt mit den Untersuchungen WESSELS über die Natur der komplexen Zahlen gegen Ende des 18. Jahrhunderts. Der Schwerpunkt dieser Periode liegt in den Arbeiten HAMILTONS (Quaternionen) und GRASSMANNS (Ausdehnungslehre). Die nach dem Tod HAMILTONS (1865) beginnende zweite Periode, die einen Ausbau der grundlegenden Ideen HAMILTONS und GRASSMANNS brachte, ist durch die Namen TAIT, PEIRCE, MAXWELL und CLIFFORD gekennzeichnet. Am Anfang der dritten Periode (1880–1910) steht die Formulierung der modernen Theorie der Vektoren durch GIBBS und HEAVISIDE, die nach der Jahrhundertwende von verschiedenen Autoren in Lehrbüchern verbreitet wurde.

Die Frage, ob die Quaternionen oder die Ausdehnungslehre für die moderne Auffassung der Vektoren grössere Bedeutung hatten, zieht sich durch das ganze Buch hindurch. Der Verfasser vertritt und belegt die Ansicht, dass einerseits ein direkter Weg von den Quaternionen herführt, dass aber andererseits auch die Ausdehnungslehre alle Möglich-