Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Transformationen von Polyedern in Polyederketten.[1])

Werde mit $Q^{(1)}$ ein begrenztes Polyeder bezeichnet und kann $Q^{(1)}$ in endlich viele Teilpolyeder $Q_i^{(1)}$ zerlegt werden, die durch Bewegungen ein Polyeder $Q^{(2)}$ entstehen lassen, so heisse das Polyeder $Q_i^{(1)}$ mit dem Polyeder $Q^{(2)}$ zerlegungsgleich.

Sätze über die Zerlegungsgleichheit von Polyedern beziehen sich in der Regel auf die Eigenschaften der Anfangs- und Endpolyeder. Den während einer Transformation auszuführenden Bewegungen der Teilpolyeder werden indessen wenig Beachtung geschenkt. Durchwegs wird die volle Bewegungsgruppe in Betracht gezogen, oder auch, wie z.B. in Sätzen von Hadwiger, daraus nur die Gruppe der Translationen. Dabei werden jedoch die Teilpolyeder einzeln bewegt; zwischen Anfangs- und Endpolyeder treten keine bemerkenswerten Zustände auf.

Meine Untersuchungen zum Problem der Polyederzerlegungen haben die kinematischen Gesetzmässigkeiten bei Lagenänderungen der Teilpolyeder Q_i sowie deren Zustände als Anfangs-, «Zwischen»- oder Endpolyeder während einer Transformation zum Inhalt. Es werden jene mehrparametrigen Bewegungsvorgänge betrachtet, die entstehen, wenn die Teilpolyeder Q_i durch Gelenkwerke g_i in Systemen ΣQ_i zusammenhängen. Eingeführt werden: Eckengelenkwerke, bei denen zwei Polyeder durch einen Eckpunkt verbunden sind, und Kantengelenkwerke, bei denen zwei Polyeder eine gemeinsame Kante haben, um die sie schwenken können. Dadurch werden kinematische offene oder geschlossene Teilpolyederketten gebildet[2]).

Diese Ketten stellen eine Reihe von meist noch ungelösten Problemen wie z.B.: Lässt sich jedes Polyeder in eine geschlossene Kette transformieren? Falls mehrere geschlossene Ketten als Transformationen eines Polyeders existieren, welche gemeinsamen Eigenschaften haben sie? Welche Ketten existieren zwischen zwei gegebenen zerlegungsgleichen Polyedern?

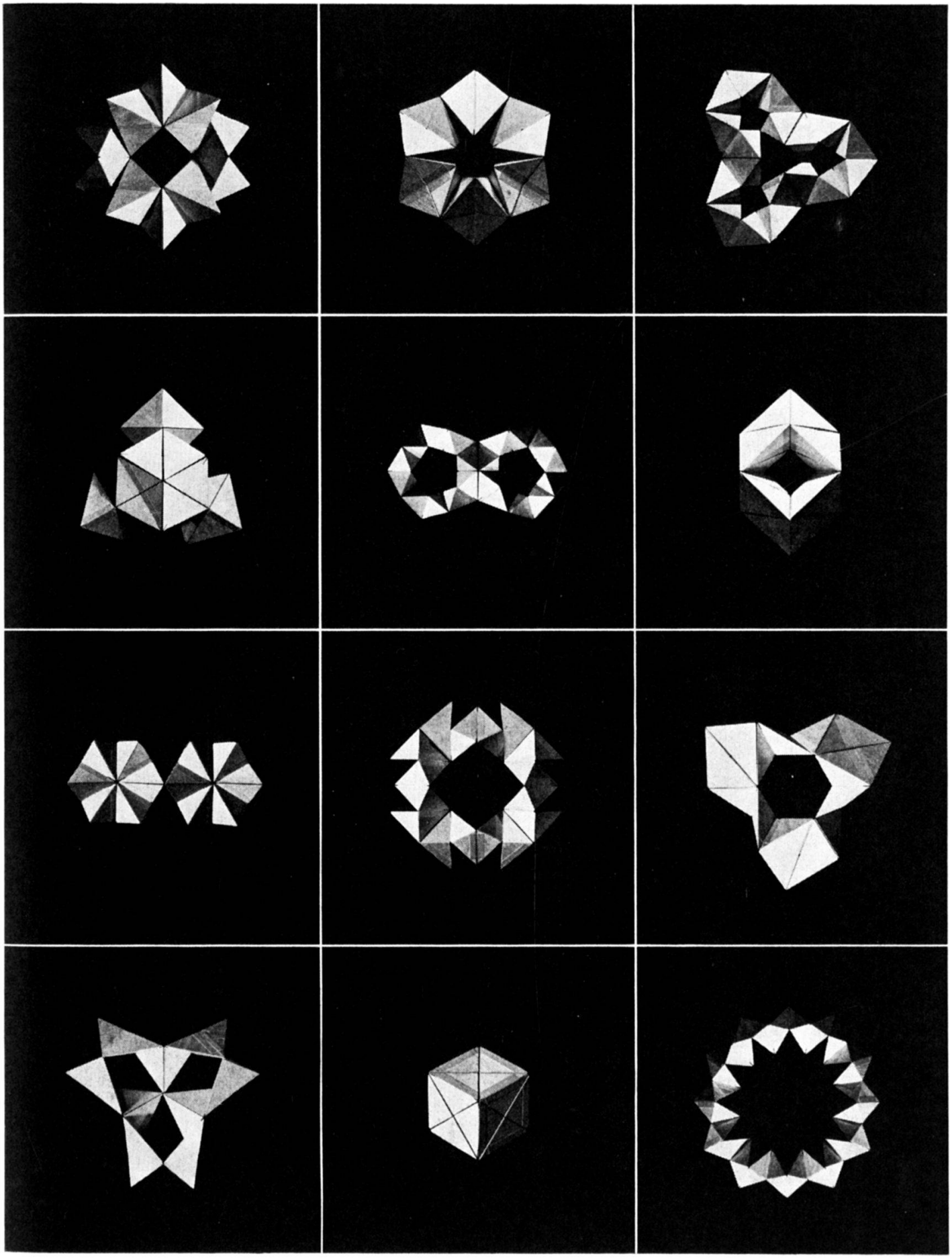
Zur Einführung sei dazu hier nun der einfachste Satz gegeben: Alle regulären konvexen Polyeder lassen sich in geschlossene Polyederketten zerlegen, deren Glieder jeweils paarweise kongruente Polyeder sind.

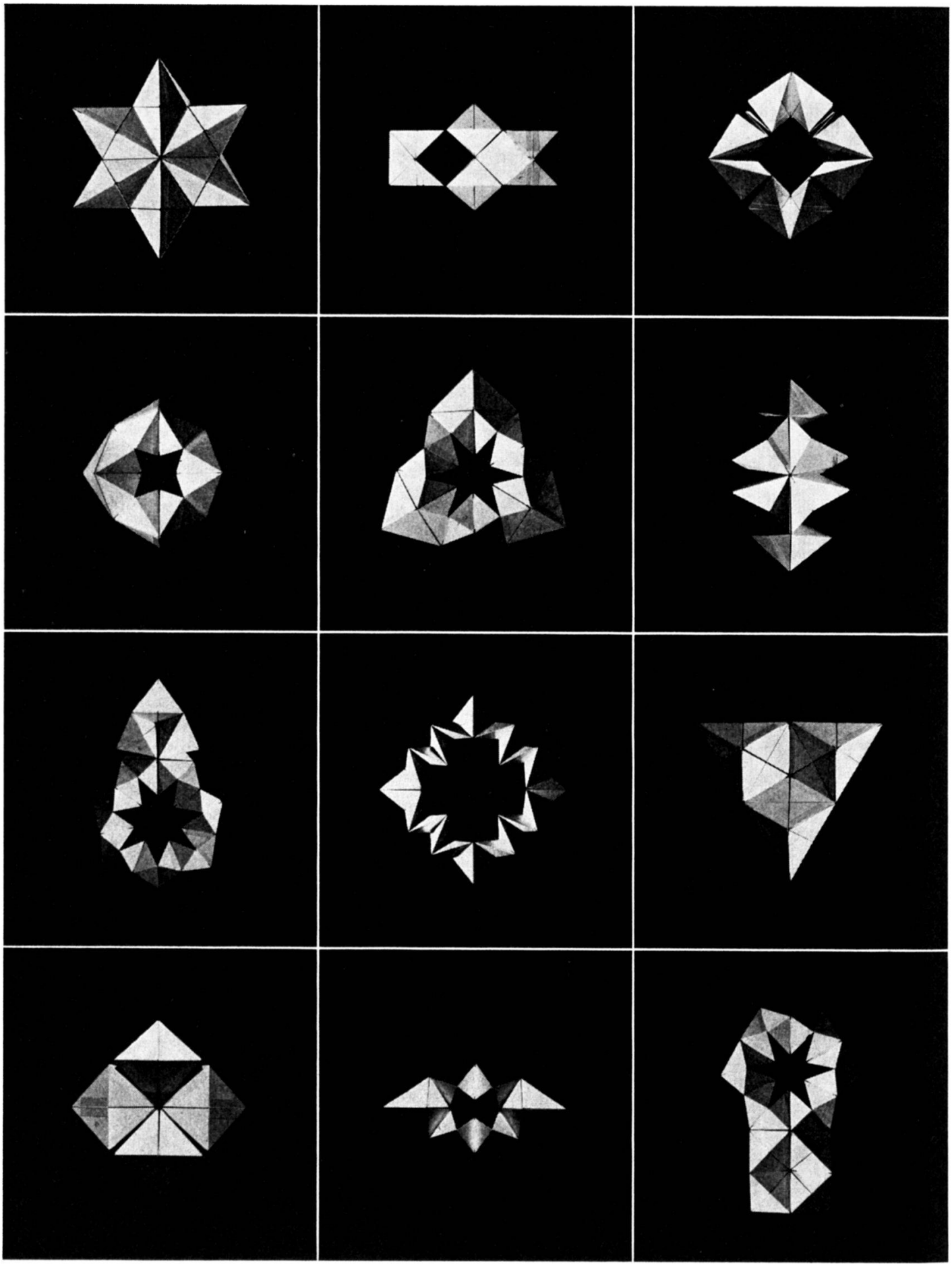
Der Beweis sei am Beispiel des Würfels gegeben: Die sechs Ebenen durch das Zentrum M entlang den Diagonalen der Flächen $f_1, f_2, \ldots f_6$ teilen das Hexaeder in 24 kongruente Teilpolyeder (Tetraeder) $T_1, T_2, \ldots T_{24}$ mit den Kantenmassen 1, 1/2, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2$. Wird nun ein Kantenverbund derart hergestellt, dass die Tetraederkanten z_3 ($\sqrt{2}/2$) von T_1 mit z_3 von T_2 und die Kanten z_4 ($\sqrt{3}/2$) von T_2 mit z_4 von T_3 usw. bis zu den Kanten z_4 der T_{24} und T_1 schwenkbar gelenkig verbunden werden, so erhalten wir eine 24-gliedrige geschlossene Teilpolyederkette K_1.

---

[1]) Clahsensche geschlossene, n-gliedrig-kongruente, kinematische Polyederketten, Urheberrecht und Copyright, int. mod. dep., Pat. und Gbm. angemeldet.

[2]) Die Anregungen zu meinen die Kinematik beinhaltenden Arbeiten über Polyedertransformationen empfing ich durch die bereits vor 40 Jahren begonnenen Erforschungen des zwangsläufig umstülpbaren Würfelgürtels von Paul Schatz aus Dornach.





Werden andererseits die Kanten z_1 (1) von T_1 mit z_1 von T_2, und z_2 (1/2) von T_2 mit z_2 von T_3 usw. miteinander verbunden, so entsteht eine ebenfalls geschlossene Kette K_2. Bringen wir die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke der T_1 bis T_{24} zur Deckung, so teilt die Ebene durch die Kanten z_2 und die Halbierungspunkte h der Kanten z_1 die Kette K_2 in zwei kongruente geschlossene Teiltetraederketten K_3 und K_4. Beide Ketten lassen sich zu einer einzigen 48-gliedrigen geschlossenen Kette K_5 verknüpfen. Bringen wir nun die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke irgend zweier kongruenter 24-gliedriger Ketten K_2 zur Deckung, so lässt sich eine geschlossene Kette K_6 bilden, die zerlegungsgleich mit einem Rhombendodekaeder ist.

Stehen zur räumlich-kinematischen Manipulation im Kantenverbund gelenkige, geschlossene Teilpolyederketten in Modellen zur Verfügung, so lassen sich, während Anfangspolyeder in Endpolyeder übergeführt werden, endliche «Zwischenpolyederzustände» verfolgen und wahrscheinliche oder unerwartete, oft ästhetisch besonders interessante Bewegungen beobachten und Konfigurationen feststellen, die selbstverständlich alle mit dem Anfangspolyeder zerlegungsgleich sind. Einen Ausschnitt aus der Vielfalt der Konfigurationen der Kette K_1 zeigen die Fotoreproduktionen der Doppelseite.

Konzept und Imagination des Manipulierenden sind es überlassen, die Ketten beliebig zu transformieren. Die Polyederketten könnten nicht nur zum Studium der Zerlegungsgleichheit Hilfsmodelle darstellen, sondern auch Einblicke interpretativer Art in den nahezu unbegrenzten Reichtum der Natur- oder Kunstformen gewähren. Besonders erwähnenswert sei dazu, dass die interessantesten Teilpolyederlagerungen als Ketten in Zerlegungspolyedern doppel-spiralartigen Anordnungen unterliegen.

Peer Clahsen, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 626. Es seien ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $a \geqslant b \geqslant c$ (die Seite der Länge a liege dem Eckpunkt A gegenüber usw.) und A', B', C' bzw. A'', B'', C'' die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch A, B, C mit den Gegenseiten bzw. mit der Umkreislinie von ABC. Man beweise: 1) $A'A'' \geqslant B'B'' \geqslant C'C''$; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 2) $BB'' \leqslant AA''$, $BB'' \leqslant CC''$; Gleichheit genau dann, wenn die entsprechenden Seitenlängen gleich sind. 3) Beide Beziehungen $AA'' < CC''$, $CC'' < AA''$ kommen vor.

P. Erdös, Budapest

Lösung: Es bezeichnen α, β, γ die Masse der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C und R den Umkreisradius von ABC.

1. Durch Betrachtung der Dreiecke ACC'' und $AC'C''$ ergeben sich die Beziehungen

$$AC'' = 2R \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad C'C'' = AC'' \cdot \frac{\sin \gamma/2}{\sin(\alpha + \gamma/2)},$$