Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 26 (1971)

Heft: 5

Artikel: Zu Formeln von Fejes Tóth und Hoppe für den Inhalt sphärischer Tetraeder

Autor: Weissbach, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28070

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REFERENCES

[1] Cf. C. F. GAUSS, *Summatio quarundam serierum singularium*, Werke v. 2, especially p. 16–17.

[2] See e.g. G. PÓLYA, *Mathematical discovery* (Wiley, 1962), v. 1, p. 68–75, or the German translation, *Vom Lösen mathematischer Aufgaben* (Birkhäuser, 1966), v. 1, p. 110–119. Also French, Japanese and Hungarian translations available.

[3] G. PÓLYA, *J. Combinatorial Theory*, v. 6, 1969, p. 102–105; see p. 105.

[4] See e.g. M. G. KENDALL and A. STUART, *The advanced theory of statistics* (London, 1961), v. 2, p. 494.

[5] G. PÓLYA, *Proceedings of the Second Chapel Hill Conference on Combinatorial Mathematics and its Applications* (1970), p. 381–384, from which, with the kind permission of the Organizing Committee, extensive passages of Sections 4 and 5 are extracted.

[6] LEONHARD EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum* (Lausanne, 1748), v. 1, p. 253–275 (De Partitione Numerorum) or *Opera Omnia*, ser. 1, v. 8, p. 313–338. There are several modern expositions; the reader can find what is needed in the sequel with relatively little trouble in John Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley, 1958), p. 107–123, and especially p. 153, Problem 5.

[7] See, e.g., M. G. KENDALL and A. STUART, l.c.[4]), p. 479. Also E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2nd ed. (Leipzig & Berlin, 1927), p. 94–97.

Zu Formeln von Fejes Tóth und Hoppe für den Inhalt sphärischer Tetraeder

FEJES TÓTH [2] gab 1956 eine Formel für den Inhalt jener sphärischen Tetraeder an, die SCHLÄFLI [5] Orthoscheme genannt hat. An anderem Ort bemerkt FEJES TÓTH [3], dass es ihm nicht gelungen ist, die Identität dieser Formel mit einer gleichwertigen von HOPPE [4] aus dem Jahre 1882 auf direktem Wege nachzuweisen. Wie man mit einfachen Mitteln beide Formeln ineinander überführen kann, soll nachstehend gezeigt werden.

Bezeichnet man den Inhalt des Orthoschems im dreidimensionalen sphärischen Raum der Krümmung + 1 mit $S^{(4)}$, so ist nach HOPPE

$$2\,S^{(4)} = \int_{\delta}^{\beta_2} \phi(\psi)\,d\psi\,; \qquad \frac{\tan^2\phi}{\tan^2\beta_3\,\sin^2\beta_2} + \frac{\tan^2\psi}{\tan^2\beta_2} = 1 \tag{1}$$

$$\sin\delta = \sin\beta_2\cos\beta_1$$

und nach FEJES TÓTH

$$2\,S^{(4)} = \int_0^{\alpha_1} \left[S_1^{(2)} - \phi^*(\psi)\arctan\frac{\tan S_1^{(2)}}{\phi^*(\psi)}\right] d\psi \tag{2}$$

mit:

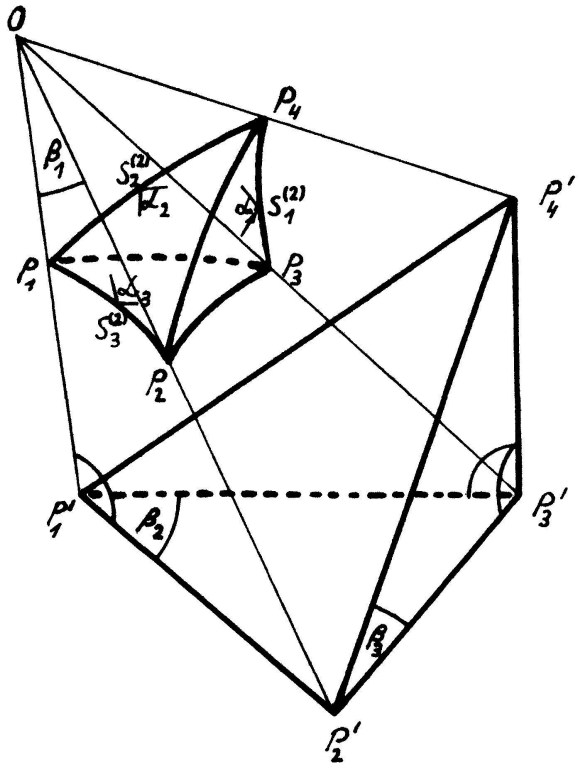
$$(\phi^*)^2 = \frac{\cos^2\alpha_2\cos^2\psi}{\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2\sin^2\psi} \tag{2*}$$

$$\tan^2 S_1^{(2)} = \tan^2 S_1^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_3}.$$

Zur Erläuterung der auftretenden Grössen möge die Abbildung dienen.

Der dreidimensionale sphärische Raum wird als Kugelfläche in einen vierdimensionalen euklidischen Raum eingebettet. Aus dem Mittelpunkt der Kugel wird

das Orthoschem auf einen dreidimensionalen, zum Strahl OP_1 normalen, euklidischen Unterraum projiziert. Bei HOPPE sind β_2 und β_3 Winkel zwischen Kanten des Bildtetraeders, β_1 ein Winkel zwischen Projektionsstrahlen. In der Formel von FEJES TÓTH



sind mit α_i die von $\pi/2$ verschiedenen Winkel zwischen den Wänden des Orthoschems bzw. den projizierenden Unterräumen bezeichnet. $S_i^{(2)}$ist die zum Winkel α_i gehörende Kante des Orthoschems. Vorausgesetzt wird $0 < \beta_i < \pi/2$ $(i = 1, 2, 3)$ oder, damit gleichwertig $0 < \alpha_i < \pi/2$. Hierin liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit: Ist $\pi/2 < \alpha_h < \pi$, so lässt sich das Orthoschem in Teilorthoscheme zerlegen, deren Winkel den Forderungen genügen. Für $\alpha_h = 0$, $\pi/2$ oder π kann $S^{(4)}$ sofort angegeben werden (SCHLÄFLI [6]). Unter den angeführten Voraussetzungen sind die Winkel α_i und β_i über

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 \sin\beta_2\,, \quad \cos\alpha_2 = \cos\beta_2 \sin\beta_3\,, \quad \cos\alpha_3 = \cos\beta_3 \tag{3}$$

verbunden. Werden in (1) die Winkel α_i als Bestimmungsstücke eingeführt, so ergibt sich

$$2\,S^{(4)} = \int_{\varrho}^{\alpha_1} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\,d\psi\,, \qquad \sin\varrho = \frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_3}\,. \tag{4}$$

(Man vergleiche auch BÖHM [1]).

Um aus (4) auf direktem Wege (2) herzuleiten, oder umgekehrt, betrachte man die Funktion

$$\begin{aligned} F(\varphi, \psi) &= \frac{\partial}{\partial\varphi} \arcsin\left(\frac{\sin\varphi \sin\psi}{\cos\alpha_2}\right) \frac{\partial}{\partial\psi}\, S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= \frac{\cos\varphi \sin\psi \cos^2\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos\psi}{(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\varphi \sin^2\psi)^{1/2}\,(\sin^2\psi \sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2)^{1/2}\,(\sin^2\psi - \cos^2\alpha_2)} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(\varrho < \psi \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right).$$

Wird

$$(\sin^2\psi \sin^2\alpha_3 - \cos^2\alpha_2) \cos^2\varphi \doteqdot u(\varphi, \psi)\,, \quad (\cos^2\alpha_2 - \sin^2\varphi \sin^2\psi) \cos^2\alpha_3 \doteqdot v(\varphi, \psi)$$

gesetzt, so ist, wie leicht nachweisbar

$$F(\varphi, \psi) = \frac{\frac{1}{2}\left[u \frac{\partial v}{\partial \psi} - v \frac{\partial u}{\partial \psi}\right]}{u^{1/2}\, v^{1/2}\, [u + v]} = \frac{\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{u}{v}\right]^{1/2}}{1 + \frac{u}{v}}$$

folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} F(\varphi, \psi)\, d\varphi = \psi \frac{\partial}{\partial \psi} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\,; \quad \left(\varrho < \psi \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

$$\int_\varrho^{\alpha_1} F(\varphi, \psi)\, d\psi = \arctan \left[\frac{u(\varphi, \alpha_1)}{v(\varphi, \alpha_1)}\right]^{1/2}; \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right). \tag{6*}$$

Ausgehend von (4) gewinnt man durch Teilintegration, da $S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)$ für $\psi = \varrho$ verschwindet:

$$2\, S^{(4)} - \alpha_1\, S_1^{(2)} = -\int_\varrho^{\alpha_1} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} S_1^{(2)}(\psi, \alpha_2, \alpha_3)\, d\psi = -\int_\varrho^{\alpha_1} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} F(\varphi, \psi)\, d\varphi\,.$$

Austausch der Integrationen bringt mit (6*)

$$2\, S^{(4)} = \alpha_1\, S_1^{(2)} - \int_0^{\frac{\pi}{2} - \alpha_2} \arctan \left[\frac{\sin\alpha_1 \cos\varphi \tan S_1^{(2)}}{(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1 \sin^2\varphi)^{1/2}}\right] d\varphi\,. \tag{7}$$

Hier hat man nur noch $\sin\alpha_1 \sin\varphi = \cos\alpha_2 \sin\psi$ zu setzen, um die Formel von Fejes Tóth zu gewinnen. – Man findet $F(\varphi, \psi)$ beim Versuch, für (2) die Schläflische Differentialformel

$$\frac{\partial S^{(4)}}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2} S_i^{(2)}$$

zu bestätigen.

B. Weissbach, Magdeburg

LITERATUR

[1] J. Böhm, *Untersuchung des Simplexinhalts in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimensionen*, J. für reine und angew. Math. *202*, 16–51 (1959).
[2] L. Fejes Tóth, *On the Volume of a Polyhedron in Non-Eudidean Spaces*, Publ. Math. *4*, 256–261.
[3] L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren* (Leipzig 1965).
[4] R. Hoppe, *Berechnung einiger vierdehniger Winkel*, Arch. Math. Phys. *67*, 269–290 (1882).
[5] L. Schläfli, *Gesammelte math. Abhandlungen 1* (*Theorie der vielfachen Kontinuität, aus dem Jahre 1852*) (Basel 1950), S. 227ff.
[6] L. Schläfli, *Gesammelte math. Abhandlungen 2* (*Über eine Funktion von drei Winkeln, aus dem Jahre 1854*) (Basel 1953), S. 156–163.