Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 4

Artikel: Projektion des Torus in isotroper Richtung
Autor: Hohenberg, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28631

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 27 Heft 4 Seiten 73-96 10. Juli 1972

Projektion des Torus in isotroper Richtung

Der wahre Umriss (die Kontur) des Torus bei beliebiger Sehstrahlrichtung wird in 1. durch eine sehr einfache Formel angegeben. In 2. werden wahrer und scheinbarer Umriss bei isotroper Sehstrahlrichtung auf drei Arten bestimmt. Der wahre Umriss bildet sich im Normalriss auf die Mittenebene auf zwei Konchoiden des Nikomedes ab. In der Mittenebene erhält man als scheinbaren Umriss zwei Kreise, die den Torus in je zwei Punkten berühren, in einer Meridianebene hingegen zwei gleichseitige Hyperbeln, die den Torus in denselben Punkten berühren. In 3. folgt ein Vergleich mit den anderen zwei Fällen, in denen der Parallelriss des Torus in Kreise und Geraden zerfällt, und es wird auf den polaren Zusammenhang mit den Loxodromenkreisen des Torus und auf die Analogie mit dem Parallelwinkel der hyperbolischen Geometrie hingewiesen.

1. Wahrer Umriss des Torus bei beliebiger Sehstrahlrichtung

Gegeben sei ein Torus ϕ (Achse a, Mittelpunkt O, Radius R des Mittenkreises m in der Mittenebene μ, Meridiankreisradius r, Knotenpunkte D_1, D_2 auf a im Abstand $\sqrt{r^2 - R^2}$ von O). In kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 (Ursprung O, Mittenebene $x_3 = 0$) hat ϕ die Parameterdarstellung (Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$)

$$\mathfrak{x}\{x_1 = (R + r\cos u)\cos v,\ x_2 = (R + r\cos u)\sin v,\ x_3 = r\sin u\} \tag{1}$$

$u =$ const. ergibt einen Parallelkreis, $v =$ const. einen Meridiankreis.

Die Sehstrahlen seien gegen die Mittenebene μ unter dem Winkel σ geneigt; sie können o. B. d. A. parallel zur Ebene $x_2 = 0$ angenommen werden, die Sehstrahlrichtung daher durch den Vektor $\mathfrak{s} = (1, 0, \operatorname{tg}\sigma)$. Ein Punkt $\mathfrak{x}$ von ϕ gehört zum wahren Umriss k von ϕ, wenn die Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{s}$ komplanar sind. Daraus folgt (nach Abspaltung des Faktors $R + r\cos u$, dessen Nullsetzen im komplexen Gebiet nicht nur D_1 und D_2 ergibt, sondern auch die auf ϕ liegenden vier Geraden, die von D_1, D_2 zu den absoluten Kreispunkten von μ laufen)

$$\underline{\cos v = -\operatorname{tg}\sigma \cdot \operatorname{tg} u}\,. \tag{2}$$

(2) stellt k in den inneren Koordinaten u, v von ϕ dar. Drückt man v in (1) nach (2) durch u aus, so erhält man eine Parameterdarstellung $\mathfrak{x}(u)$ von k. Bekanntlich

ist k eine Raumkurve 8. Ordnung. Ihr Parallelriss auf eine Bildebene π, der scheinbare Umriss k^s von ϕ, ist eine ebene Kurve 8. Ordnung. Ist π normal zur Sehstrahlrichtung, so ist k^s ein Normalriss von ϕ, eine Toroide (Parallelkurve zur Bildellipse des Mittenkreises im Abstand r).

2. Projektion des Torus in isotroper Richtung

1. Erster Weg. Der Fernpunkt der Sehstrahlen sei nun ein Punkt des absoluten Kegelschnitts, etwa ein absoluter Kreispunkt J der Ebene $x_2 = 0$. Wir wählen $\operatorname{tg}\sigma = +i$. Aus (2) folgt dann

$$\underline{\cos u \cdot \sin v = \pm 1} \tag{3}$$

als Gleichung von k in u, v. Entsprechend den beiden Vorzeichen in (3) besteht k hier aus zwei Kurven k_1, k_2. Nach (3) kann man $\sin v = \pm 1/\cos u$, $\cos v = -i \operatorname{tg} u$ in (1) einsetzen; dann sind x_1, x_2, x_3 rationale Funktionen von $\operatorname{tg} u/2$. Daher sind k_1 und k_2 rationale Raumkurven. Sie sind von 4. Ordnung, denn sie entstehen durch Zerfall der Raumkurve 8. Ordnung des allgemeinen Falles. *k_1 und k_2 sind Raumkurven 4. Ordnung II. Art;* der Sehstrahlzylinder aus J, der durch k_1 geht, ist die einzige Quadrik, auf der k_1 liegt; analog bei k_2.

Elimination von u aus $x_1 = x_1(u)$, $x_2 = x_2(u)$ ergibt als Normalriss (Grundriss) von k_1, k_2 auf die Mittenebene μ die Kurven k_1', k_2'

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(x_2 \mp r)^2 - R^2\, x_2^2 = 0\,. \tag{4}$$

k_1' und k_2' sind Konchoiden des Nikomedes (auf jeder Geraden durch O wird vom Schnittpunkt mit $x_2 = \pm r$ die Strecke R nach beiden Seiten aufgetragen). k_1', k_2' vertauschen sich durch Spiegelung an $x_2 = 0$ und haben in O dieselben Doppelpunktstangenten.

Der scheinbare Umriss von ϕ auf die Mittenebene μ erhalte den Index s, der scheinbare Umriss auf die Meridianebene $x_1 = 0$ den Index σ. Der isotrope Sehstrahl durch einen Punkt $\mathfrak{x}(u)$ von k schneidet μ im Punkt $\mathfrak{x}^s\,(x_1(u) + i\,x_3(u),\, x_2(u),\, 0)$, und $x_1 = 0$ im Punkt $\mathfrak{x}^\sigma\,(0,\, x_2(u),\, x_3(u) - i\,x_1(u))$. Elimination von u aus $\mathfrak{x}^s$ bzw. $\mathfrak{x}^\sigma$ zeigt: *Der Parallelriss von ϕ auf die Mittenebene μ besteht aus den Kreisen k_1^s, k_2^s*

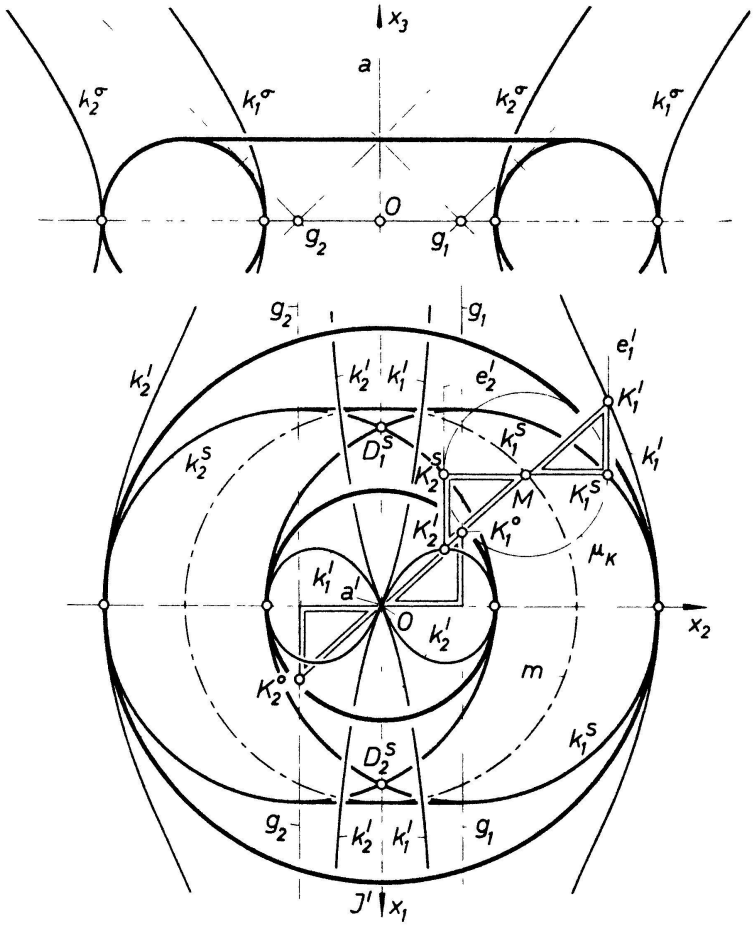
$$x_1^2 + (x_2 \mp r)^2 = R^2, \quad x_3 = 0\,. \tag{5}$$

Der Parallelriss von ϕ auf die Meridianebene $x_1 = 0$ besteht aus den gleichseitigen Hyperbeln k_1^σ, k_2^σ

$$x_1 = 0, \quad (x_2 \mp r)^2 - x_3^2 = R^2\,. \tag{6}$$

k_1^σ und k_2^σ gehen durch die Knotenpunkte D_1, D_2, während k_1^s und k_2^s durch die Punkte $(\pm\sqrt{R^2 - r^2},\, 0,\, 0)$ gehen, die sich durch Projektion von D_1, D_2 aus J auf μ ergeben. k_1^s, k_2^s, k_1^σ, k_2^σ berühren ϕ in je zwei Punkten auf der x_2-Achse (Abb. Ringtorus).

2. Zweiter Weg. Diese Ergebnisse findet man auch ohne Rechnung. Eine Kugel $\varkappa$ (Mittelpunkt M auf dem Mittenkreis m von ϕ, Radius r) berührt ϕ längs eines Meri-



diankreises m_κ und schneidet μ in einem Kreis μ_κ (Abb.). Das Projektionszentrum J hat als Grundriss auf μ den Fernpunkt J' der x_1-Achse. Durch J gehen zwei (isotrope) Erzeugenden e_1, e_2 von $\varkappa$; deren Grundrisse e_1', e_2' sind die Tangenten aus J' an μ_κ. Die Meridianebene $[a\,M]$ schneidet e_1, e_2 in den Punkten K_1, K_2; deren Grundrisse K_1', K_2' sind die reellen Schnittpunkte von $[a'\,M]$ mit e_1', e_2'. Die Geraden JK_1 und JK_2 liegen auf $\varkappa$ und sie berühren ϕ in K_1 bzw. K_2. Daher sind K_1, K_2 Punkte des wahren Umrisses k von ϕ. Die Tangentialebene von $\varkappa$ in J schneidet μ in der zu e_1' und e_2' normalen Geraden durch M; deren Schnittpunkte mit e_1', e_2' sind Punkte K_1^s, K_2^s des scheinbaren Umrisses k^s in μ. Nun seien g_1, g_2 die Parallelen zur x_1-Achse im Abstand r. Die in der Abb. mit Doppelstrichen gezeichneten Dreiecke sind kongruent. Aus $OM = K_1^0\,K_1' = K_2^0\,K_2' = R$ folgt, dass der Grundriss k' von k aus zwei Nikomedischen Konchoiden k_1', k_2' von O bezüglich g_1 bzw. g_2 mit dem Abstand R besteht. K_1^s, K_2^s gehen aus M durch Verschiebung in x_2-Richtung um $\pm\, r$ hervor, daher besteht der scheinbare Umriss k^s in μ aus den Kreisen k_1^s, k_2^s, die aus m durch dieselben Verschiebungen hervorgehen.

Durch die Sehstrahlen wird zwischen μ und der Meridianebene $x_1 = 0$ eine perspektive Affinität hergestellt; die Abstände entsprechender Punkte von der Affinitätsachse $x_1 = x_3 = 0$ haben das Verhältnis i. Dabei gehen k_1^s, k_2^s in den scheinbaren Umriss von ϕ in $x_1 = 0$ über, nämlich in die gleichseitigen Hyperbeln k_1^σ, k_2^σ.

3. Dritter Weg. Der Tangentialkegel ζ aus einem Punkt Z an einen Torus ϕ ist, wie bekannt, ein Kegel 8. Ordnung. Er berührt ϕ längs des wahren Umrisses k, einer

Raumkurve 8. Ordnung, und er schneidet eine Bildebene π im scheinbaren Umriss k^c von ϕ für das Auge Z, einer Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse. Ist das Projektionszentrum ein Punkt J des absoluten Kegelschnittes, so hat k, da der absolute Kegelschnitt Doppelkurve von ϕ ist, in J einen vierfachen Punkt; dessen Tangenten sind die Haupttangenten beider Mäntel von ϕ in J. Daher wird k aus dem vierfachen Punkt J durch einen Zylinder von 4. statt 8. Ordnung projiziert, und k^c ist von 4. Ordnung. Nun hat k^c vier Doppelpunkte, nämlich die Bilder der Knotenpunkte von ϕ und die Bilder der absoluten Kreispunkte der Mittenebene μ; daher zerfällt k^c. So ergeben sich wiederum k_1^s, k_2^s in μ bzw. k_1^σ, k_2^σ in $x_1 = 0$. Der Zylinder ζ_1 aus J durch k_1^s bzw. k_1^σ ist von 2. Ordnung, seine Schnittkurve mit ϕ muss wegen der Berührung von ζ_1 mit ϕ eine doppeltzählende Raumkurve 4. Ordnung k_1 sein; analog bei k_2. Daher sind k_1', k_2' ebene Kurven 4. Ordnung.

3. Bemerkungen

1. Der scheinbare Umriss von ϕ ist eine Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse. Als Kurve 4. Klasse zerfällt er beim Normalriss auf eine Meridianebene in die zwei Meridiankreise in dieser Ebene, beim Normalriss auf die Mittenebene μ in die zwei Parallelkreise in μ, beim Parallelriss aus J auf μ in die Kreise k_1^s, k_2^s. Als Kurve 8. Ordnung zerfällt er dabei in je zwei Kreise, aber es sind noch je zwei doppeltzählende Geraden hinzuzuzählen: beim Normalriss auf eine Meridianebene die Bilder der Flachkreisebenen, beim Normalriss auf μ die isotropen Geraden aus O in μ (sie sind die Bilder der Minimalebenen durch a, die ϕ längs je zweier Geraden berühren, nämlich längs der waagrechten isotropen Geraden durch die Knotenpunkte). *Beim Parallelriss aus J sind die Bilder der Tangentialebenen von ϕ in J hinzuzuzählen;* die Tangentialebenen von ϕ in den Punkten des absoluten Kegelschnitts umhüllen die Minimalkegel mit den Spitzen $(0, 0, \pm Ri)$ auf a, sie schneiden μ in den Tangenten des Mittenkreises; zwei dieser Tangenten berühren auch k_1^s und k_2^s. Sie ergänzen (je doppeltzählend) k_1^s, k_2^s zu einer zerfallenden Kurve 8. Ordnung. Analog bei k_1^σ, k_2^σ.

2. *Bei anderer Gelegenheit soll gezeigt werden, dass bei einem Spindel- oder Ringtorus die Tangentialkegel aus den Punkten des absoluten Kegelschnittes durch räumliche Polaritäten in die Loxodromenkreise übergeführt werden können, und zwar auf vierfache Art.*

3. *In* (3) *kann man $u = il/2c$ setzen. Dann geht* (3) *in die bekannte Formel für den Parallelwinkel der hyperbolischen Geometrie über* (c = Masskonstante, l = hyperbolischer Abstand eines Punktes P von einer Geraden g, v = Winkel, den eine Parallele durch P zu g mit der Normalen aus P auf g einschliesst). Darauf soll bei anderer Gelegenheit eingegangen werden.

Fritz Hohenberg, Graz