# Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

Autor(en): **Kreyszig, Erwin / Pendl, Alois**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29448

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. BOREL, *Eléments de la théorie des ensembles* (Paris 1949), Note IV.
[2] M. GARDNER, *Further mathematical diversions* (London 1970), Chapter 19.
[3] S. W. GOLOMB, *Replicating Figures on the Plane*, Math. Gaz. *48*, 403–412 (1964).
[4] D. HILBERT, *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, Math. Ann. *38*, 459–460 (1891).
[5] K. KNOPP, *Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch*, Arch. Math. Phys. *26*, 103–115 (1917).
[6] G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. *36* 157–160, (1890).
[7] W. WUNDERLICH, *Irregular Curves and Functional Equations*, Ganita (Proc. Benares Math. Soc. ) *5*, 215–230 (1954).
[8] W. WUNDERLICH, *Una generazione comune di diverse curve patologiche*, Atti VI Congr. U.M.I. (Napoli 1959), 426–427.

# Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen

## 1. Einleitung

Beziehungen zwischen der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie lassen sich dadurch gewinnen, dass man analytischen Funktionen $f(z)$ jeweils gewisse Flächen zuordnet, die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser «geometrischen Modelle» der betreffenden Funktionen untersucht und dabei funktionentheoretische Ergebnisse durch differentialgeometrische Begriffe ausdrückt. Brauchbar sind für diesen Zweck vor allem die Betragflächen und die Real- und Imaginärteilflächen. Einschlägige Arbeiten stammen u. a. von Ullrich [9] und seiner Schule sowie von Gackstatter [3], der die Nevanlinnasche Theorie der meromorphen Funktionen behandelt. In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einige einfache geometrische Eigenschaften von Real- und Imaginärteilflächen, die für den genannten differentialgeometrisch-funktionentheoretischen Zusammenhang von Interesse sind.

## 2. Eine Abbildungseigenschaft

Einer analytischen Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ordnen wir die Realteilfläche $R(f)$, definiert durch

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, u(x, y)) , \tag{1}$$

und die Imaginärteilfläche $I(f)$, definiert durch

$$\mathbf{r}^*(x^*, y^*) = (x^*, y^*, v(x^*, y^*)), \tag{2}$$

zu. Unter Benutzung der Cauchy-Riemann-Gleichungen ergibt sich, dass beide Flächen dieselbe Gauss-Krümmung

$$K = - \frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2} \tag{3}$$

haben; vgl. [5], S. 318, und [7].

Sind zwei Flächen isometrisch, so stimmt ihre Gauss-Krümmung an entsprechenden Punkten überein. Dies ist eine notwendige Bedingung für Isometrie. Sie ist hinreichend für (lokale) Isometrie im Falle konstanter Gauss-Krümmung; vgl. [6]. Im vorliegenden Falle gilt der

**Satz 1.** *Die durch $x^* = x$, $y^* = y$ gegebene Abbildung der Realteilfläche* (1) *einer analytischen Funktion $f$ auf deren Imaginärteilfläche $I(f)$ ist flächentreu. Für nicht konstantes $f$ ist diese Abbildung weder konform noch isometrisch. Für nicht lineares $f$ ist sie nicht geodätisch.*

*Beweis.* Die Flächentreue folgt aus der Gleichheit der Diskriminante der ersten Grundformen,

$$g = g^* = 1 + |f'|^2 . \tag{4}$$

Der Vergleich entsprechender Koeffizienten der ersten Grundformen ergibt, dass die Abbildung nicht isometrisch sein kann, von dem Trivialfall $f = konst$ abgesehen. Also kann sie auch nicht konform sein, denn Konformität und Flächentreue zusammen hätten Längentreue zur Folge. Wegen (4) reduziert sich das bekannte Kriterium für geodätische Abbildungen (vgl. [6], S. 236) im vorliegenden Falle einfach auf die Gleichheit entsprechender Christoffel-Symbole 2. Art

$$\Gamma_{jk}{}^m = \frac{\Gamma_{jkm}}{g} = \frac{u_{jk}\, u_m}{g}$$

mit $j, k, m = 1, 2$; hierbei bedeutet der Index 1 die Differentiation nach $x$ und der Index 2 die nach $y$. Wegen der Symmetrie der Christoffel-Symbole und wegen der Laplace-Gleichung gibt es im vorliegenden Fall höchstens vier verschiedene $\Gamma_{jk}{}^m$. Dies liefert die Bedingungen

$$u_x\, u_{xx} = v_x\, v_{xx} , \quad u_y\, u_{xx} = v_y\, v_{xx}$$

und noch zwei weitere, die gleichwertig sind. Komplexe Zusammenfassung ergibt $f'\, f'' = 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

## 3. Flächentreue und Cauchy-Riemann-Gleichungen

Bemerkenswerterweise gilt die in Satz 1 genannte Flächentreue nicht nur für Lösungen $u(x, y)$, $v(x, y)$ der Cauchy-Riemann-Gleichungen, sondern auch noch für Lösungen eines allgemeineren Systems

$$\begin{aligned} v_x &= A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y , \\ v_y &= C(x, y)\, u_x + D(x, y)\, u_y , \end{aligned} \tag{5}$$

wenn man die Koeffizienten geeignet wählt. Wir beweisen hierzu den folgenden

**Satz 2.** *Es seien $u(x, y)$ und $v(x, y)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems* (5) *mit den Koeffizienten*

$$A = -D = \cos \alpha(x, y) , \quad B = C = \sin \alpha(x, y) \tag{6a}$$

[$\alpha(x, y)$ *eine beliebige stetige Funktion*] *oder mit den Koeffizienten*

$$A = D = \cos\alpha(x, y)\,, \quad -B = C = \sin\alpha(x, y)\,. \tag{6b}$$

*Dann ist die Abbildung* $x^* = x$, $y^* = y$ *der Flächen* $(x, y, u(x, y))$ *und* $(x^*, y^*, v(x^*, y^*))$ *flächentreu.*

*Beweis.* Aus (5) und der Gleichheit der Diskriminanten der ersten Grundform der beiden Flächen folgt

$$(A^2 + C^2 - 1)\, u_x^2 + 2(AB + CD)\, u_x\, u_y + (B^2 + D^2 - 1)\, u_y^2 = 0\,.$$

Dies ist erfüllt für

$$A^2 + C^2 = 1\,, \quad AB + CD = 0\,, \quad B^2 + D^2 = 1\,.$$

Der ersten und der letzten dieser drei Bedingungen genügen wir, indem wir

$$A + i\,C = e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad B + i\,D = e^{i\beta}$$

setzen. Die zweite Bedingung liefert dann

$$\beta = \alpha + \frac{(2\,n + 1)\,\pi}{2}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen entsprechen (6*b*) mit konstantem $\alpha = \pi/2$. Für beliebiges konstantes $\alpha$ und zweimal stetig differenzierbares $u(x, y)$ folgt aus (6*b*) die Laplace-Gleichung, dagegen aus (6*a*) die Gleichung

$$k_1\, u_{xx} - 2\,k_2\, u_{xy} - k_1\, u_{yy} = 0 \quad (k_1 = \sin\alpha,\ k_2 = \cos\alpha)\,.$$

## 4. Paare analytischer Funktionen

Es liegt nahe, Paare analytischer Funktionen $f$ und $h$ zu betrachten, für die die Realteilflächen $R(f)$ und $R(h)$ dieselbe Gauss-Krümmung $K(f)$ bzw. $K(h)$ haben. R. Jerrard [4] bemerkte, dass letzteres zutrifft, wenn $f'(z)\, h'(z) = 1$ ist. Wesentlich allgemeiner ist der folgende

**Satz 3.** *Es seien $f$ und $h$ analytische Funktionen, die in einem Gebiet $D$ der komplexen Ebene definiert sind und deren Ableitungen durch eine Möbiustransformation verbunden sind. Dann gilt: Die zugehörigen Realteilflächen $R(f)$ und $R(h)$ haben in jedem Punkt von $D$ dieselbe Gauss-Krümmung $K(f)$ bzw. $K(h)$ dann und nur dann, wenn die genannte Transformation die Form*

$$h'(z) = \frac{a\,f'(z) + b}{-\bar{b}\,f'(z) + \bar{a}} \qquad (|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 > 0) \tag{7}$$

*besitzt.*

*Beweis.* Wegen (3) muss

$$\frac{|\,\psi'\,|}{1 + |\,\psi\,|^2} = \frac{|\,\varphi'\,|}{1 + |\,\varphi\,|^2} \tag{8}$$

mit $\varphi(z) = f'(z)$ und $\psi(z) = h'(z)$ gelten. Setzen wir

$$\psi = \frac{a\varphi + b}{c\varphi + d} \qquad (a d - b c \neq 0)$$

in (8) ein, so erhalten wir die Bedingungen

$$|a d - b c| = |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2, \quad c\bar{d} + a\bar{b} = 0.$$

Hieraus ergibt sich (7).

Dieser Satz umfasst Jerrards Ergebnis als Sonderfall. Interessanterweise sind die Transformationen (7) genau diejenigen, die den Rotationen der zu der $\varphi$-Ebene gehörigen Riemannschen Zahlensphäre entsprechen. Das leuchtet ein, wenn man bedenkt, dass die Gruppe der Transformationen (7) die Bewegungsgruppe der sphärischen Geometrie mit den «Geraden»

$$\gamma |\varphi|^2 + \bar{c}\varphi + c\bar{\varphi} - \gamma = 0, \quad c\bar{c} + \gamma^2 > 0$$

und dem Linienelement

$$ds_0 = \frac{|d\varphi|}{1 + |\varphi|^2} = \sqrt{-K(f)}\ |dz|$$

ist. Diese Transformationen lassen den chordalen Abstand

$$\chi(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{\sqrt{1 + |\varphi(z_1)|^2}\sqrt{1 + |\varphi(z_2)|^2}}$$

invariant; vgl. z.B. [2].

Den chordalen Abstand benutzt man u. a. im Zusammenhang mit normalen Familien holomorpher und meromorpher Funktionen. Jerrard [4] bemerkte, dass Martys Kriterium für Normalität (vgl. [8] und auch [1], S. 218) sich nun unter Benutzung der Gauss-Krümmung formulieren lässt. Dies ist ein Beispiel dafür, dass funktionentheoretische Ergebnisse manchmal in einfacher Weise durch differentialgeometrische Begriffe ausgedrückt werden können.

Erwin Kreyszig und Alois Pendl, Universität Karlsruhe

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, 2nd ed. (New York 1966).
[2] H. BEHNKE und F. SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, 3. Aufl. (Berlin 1965).
[3] F. GACKSTATTER, *Zur Theorie der meromorphen und algebroiden Funktionen*, Diss. (Würzburg 1969).
[4] R. JERRARD, *Curvatures of Surfaces Associated with Holomorphic Functions*, Coll. Math. *21*, 127–132 (1970).
[5] E. KREYSZIG, *Differential Geometry*, revised ed. (Toronto 1964).
[6] E. KREYSZIG, *Differentialgeometrie*, 2. Aufl. (Leipzig 1968).
[7] E. KREYSZIG, *Die Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen*, El. Math. *24*, 25–31 (1969).
[8] F. MARTY, *Recherches sur la repartition des valeurs d'une fonction méromorphe*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) *23*, 183–261 (1931).
[9] E. ULLRICH, *Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten*, Math. Z. *54*, 297–328 (1951).