# Volumen und Schwerpunkt von Polyedern

Autor(en): Schneider, Rolf

Objekttyp: Article

Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band (Jahr): 28 (1973)

Heft 6

PDF erstellt am: **24.05.2024** 

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29462

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

#### Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek* ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

## ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik

und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 28 Heft 6 Seiten 137–160 10. November 1973

### Volumen und Schwerpunkt von Polyedern

Im Rahmen einer formalen Theorie des Inhaltes kennt man eine Reihe verschiedenartiger axiomatischer Kennzeichnungen des Volumens geeigneter Punktmengen. Auch einzelne aus dem Volumen ableitbare reellwertige geometrische Funktionale, die insbesondere in der Theorie der konvexen Körper und der Integralgeometrie eine bedeutende Rolle spielen, sind durch einige ihrer Eigenschaften charakterisiert worden. Über diesen Themenkreis kann man sich in dem Buch von Hadwiger [1] sehr gut informieren.

Zu diesen «Funktionalsätzen» sind unlängst vektorielle Gegenstücke aufgewiesen worden ([2]–[4]), die im wesentlichen axiomatische Charakterisierungen gewisser Schwerpunkte zum Inhalt haben. In verwandter Weise soll in der vorliegenden Note zu einer bekannten Kennzeichnung des Volumens eine parallele Aussage hergeleitet werden, die sich auf eine Kennzeichnung des gewöhnlichen Schwerpunktes eigentlicher Polyeder bezieht. Der Beweis ergibt sich im Kern durch naheliegende und sinngemässe Übertragung der von Hadwiger [1] benutzten Methoden und belegt damit erneut die Leistungsfähigkeit der dort eingesetzten Hilfsmittel für Fragestellungen der hier ins Auge gefassten Art.

Es bezeichne  $E^n$  ( $n \ge 1$ ) den n-dimensionalen euklidischen Vektorraum (mit Skalarprodukt  $\langle , \rangle$  und Norm  $\| \cdot \|$ ) und  $\mathfrak P$  die Klasse der eigentlichen Polyeder des  $E^n$ , also aller Vereinigungen endlich vieler konvexer Polytope mit inneren Punkten im  $E^n$ . Unter einem Funktional auf  $\mathfrak P$  wollen wir zunächst ganz allgemein eine Abbildung von  $\mathfrak P$  in eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe verstehen. Unter den Eigenschaften, die ein solches Funktional besitzen kann, spielen hier die folgenden eine Rolle:

Das Funktional  $\varphi$  heisst einfach additiv, wenn

$$\varphi\left(P\ \cup\ Q\right)=\varphi(P)+\varphi(Q)$$
 für alle  $P$ ,  $Q\in\mathfrak{P}$  mit  $(P\cap\ Q)^\circ=\varnothing$ 

gilt; dabei bezeichnet M° den offenen Kern der Menge M. Als translationsinvariant wird  $\varphi$  bezeichnet, wenn

$$\varphi\left(P+t\right)=\varphi(P)$$
 für alle  $t\in E^n$ 

gilt; hier ist P+t das durch Translation um den Vektor t aus Phervorgehende Polyeder. Ist der Bildbereich von  $\varphi$  der Vektorraum  $E^n$ , so heisst  $\varphi$  translationsäquivariant, wenn

$$\varphi\left(P+t\right)=\varphi(P)+t$$
 für alle  $t\in E^n$ 

gilt. Sind dagegen die Werte von  $\varphi$  reelle Zahlen, so wird  $\varphi$  als normiert bezeichnet, wenn

$$\varphi(W) = 1$$

ist, wobei W ein fester Würfel der Kantenlänge 1 sein soll, und als definit, wenn

$$\varphi(P) \ge 0$$
 für alle  $P \in \mathfrak{P}$ 

gilt.

Nun kann die Abbildung V, die jedem Polyeder P sein Volumen V(P) zuordnet, in der folgenden Weise axiomatisch gekennzeichnet werden:

**Satz 1** (Hadwiger):  $Sei \varphi: \mathfrak{P} \to \mathbb{R}$  ein Funktional mit den folgenden Eigenschaften:

$$\varphi$$
 ist translations invariant, (1)

$$\varphi$$
 ist einfach additiv, (2)

$$\varphi$$
 ist definit, (3)

$$\varphi$$
 ist normiert. (4)

Dann ist  $\varphi = V$ .

Satz und Beweis findet man bei Hadwiger [1], S. 37–39. Der Satz ist hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben, da er als Vorbild für eine nachfolgende Aussage über den Schwerpunkt dienen soll.

Der Schwerpunkt s(P) eines Polyeders  $P \in \mathfrak{P}$  kann bekanntlich erklärt werden durch

$$s(P) = \frac{1}{V(P)} \int\limits_{P} x \, dV(x) , \qquad (5)$$

wo x den in P variierenden Ortsvektor bezeichnet (wir unterscheiden hier nicht zwischen Punkten und ihren Ortsvektoren). Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, dass die Abbildung s, die jedem Polyeder P seinen Schwerpunkt zuordnet, translationsäquivariant ist und dass das Funktional Vs einfach additiv ist. Die letztgenannte Eigenschaft können wir übrigens wegen der einfachen Additivität des Volumens auch in der Form

$$s(P \cup Q) = \frac{V(P)s(P) + V(Q)s(Q)}{V(P) + V(Q)} \quad (P, Q \in \mathfrak{P}, (P \cap Q)^{\circ} = \varnothing)$$

schreiben, wodurch es nahegelegt wird, dem Schwerpunktsfunktional s die Eigenschaft der einfachen Additivität mit Gewicht V zuzusprechen. Eine weitere wichtige Eigenschaft des Funktionals s, die hier an die Stelle der dem Volumfunktional zukommenden Definitheit zu treten hat, lässt sich ebenfalls direkt an (5) ablesen: Ist  $u \in E^n$  ein Vektor und  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl derart, dass  $\langle x, u \rangle \geq \alpha$  für alle  $x \in P$  erfüllt ist, so gilt auch  $\langle s(P), u \rangle \geq \alpha$ ; mit anderen Worten: jeder Halbraum, der das Polyeder P enthält, enthält auch seinen Schwerpunkt s(P). Somit liegt s(P) in der konvexen Hülle konv P des Polyeders P.

Wir wollen noch bemerken, dass man für Polyeder die Definition des Schwerpunktes und den Nachweis der oben angeführten formalen Eigenschaften auch unschwer ohne Zuhilfenahme des Integralbegriffs in elementarer Weise hätte bewerkstelligen können, indem man das von Hadwiger [1], S. 39–41, beim Existenznachweis für das Volumfunktional benutzte, nach der Dimension fortschreitende, induktive Vorgehen nachgeahmt hätte.

Als vektorielles Gegenstück zu Satz 1 haben wir nun den folgenden Kennzeichnungssatz:

Satz 2: Sei  $f: \mathfrak{P} \to E^n$  ein Funktional mit den folgenden Eigenschaften:

$$f$$
 ist einfach additiv mit Gewicht  $V$ ,  $(7)$ 

$$f(P) \in \text{konv } P \text{ für alle } P \in \mathfrak{P}.$$
 (8)

Dann ist f = s.

Beweis. Sei n = 1. Wir setzen  $f(\overline{ab}) = g(a, b)$ , wenn  $\overline{ab}$  die Strecke in  $E^1 = \mathbb{R}$  mit den Endpunkten a und b (a < b) bezeichnet. Für g ergeben sich aus den Voraussetzungen die Funktionalgleichungen

$$g(a+c,b+c) = g(a,b) + c,$$
 (a < b)

$$(a+b) g (0, a+b) = a g(0, a) + b g (a, a+b),$$
  $(a, b > 0).$  (10)

Aus (9) und (10) zusammen folgert man

$$(a + b) g (0, a + b) = a g(0, a) + b g(0, b) + ab,$$
  $(a, b > 0).$ 

Setzen wir  $h(x) = x g(0, x) - (1/2) x^2$  für x > 0, so ergibt sich für h die Cauchysche Funktionalgleichung h(a + b) = h(a) + h(b). Wegen der Voraussetzung (8), welche die lokale Beschränktheit der Funktion h nach sich zieht, folgt daraus bekanntlich  $h(x) = \alpha x \min \alpha = h(1)$ , also  $g(0, x) = 1/2 x + \alpha$  für x > 0. Die Gleichung (9) liefert dann  $g(a, b) = (1/2) (a + b) + \alpha$  für a < b, also  $f(\overline{ab}) = s(\overline{ab}) + \alpha$ . Wegen der Voraussetzung (8) kann nur  $\alpha = 0$  sein. Damit ist die Behauptung für n = 1 bewiesen.

Sei nun n > 1 und die Behauptung bereits bewiesen für alle Dimensionen < n. Seien  $E_p$ ,  $E_q \subset E^n$  zwei orthogonale Unterräume der Dimension  $p \ge 1$  bzw.  $n - p = q \ge 1$ . Sind  $P \subset E_p$  und  $Q \subset E_q$  eigentliche Polyeder in den jeweils angegebenen Trägerebenen, so ist die Minkowskische Summe P + Q ein eigentliches Polyeder im  $E^n$ . Es gibt eine eindeutige Darstellung

$$f(P + Q) = f_1(P, Q) + f_2(P, Q)$$

mit  $f_1(P,Q) \in E_p$  und  $f_2(P,Q) \in E_q$ . Bei festgehaltenem Q ist  $f_1(\cdot,Q)$  ein Funktional, das jedem eigentlichen Polyeder P im  $E_p$  einen Punkt  $f_1(P,Q)$  dieses Raumes zuordnet. Man bestätigt mühelos, dass  $f_1(\cdot,Q)$  bezüglich  $E_p$  die gleichen Eigenschaften aufweist wie f bezüglich  $E^n$  (hierbei ist unter anderem die Beziehung  $V(P+Q) = V_1(P)$   $V_2(Q)$  zu benutzen, wo  $V_1$  das p-dimensionale Volumen in  $E_p$  bezeichnet und

 $V_2$  für  $E_q$  entsprechend erklärt ist). Nach Induktionsannahme ist  $f_1(P, Q) = s_1(P)$ , wenn  $s_1$  den bezüglich  $E_p$  gebildeten Schwerpunkt bezeichnet. Analog ergibt sich  $f_2(P,Q) = s_2(Q)$ , insgesamt also  $f(P+Q) = s_1(P) + s_2(Q) = s(P+Q)$ ; letztere Gleichheit ist sofort aus (5) durch sukzessive Integrationen herzuleiten. Wir haben also f(Z) = s(Z) für alle geraden zweistufigen Zylinder  $Z \in \mathfrak{P}$  gefunden. Setzen wir nun v(P) = V(P) [f(P) - s(P)] für  $P \in \mathfrak{P}$ , so ist die dadurch erklärte Abbildung  $v: \mathfrak{P} \to E^n$  translationsinvariant und einfach additiv, und auf geraden Zylindern verschwindet sie. Unter Benutzung der kanonischen Simplexzerlegung und der Orthogonalergänzung findet man wörtlich genauso wie in Hadwiger [1], S. 38 unten, dass  $v(2^{-m}P) = 2^{-m}v(P)$  für alle  $P \in \mathfrak{P}$  und alle natürlichen Zahlen m gilt. Nach Voraussetzung gilt  $f(\lambda P) \in \text{konv}$   $(\lambda P) = \lambda$  konv P für  $\lambda > 0$ , und ebenso gilt  $s(\lambda P) \in \lambda$  konv P. Also ist

$$|| f(\lambda P) - s(\lambda P) || \leq \lambda \delta(P)$$
,

wenn  $\delta(P)$  den Durchmesser von P-bezeichnet. Wenn  $\lambda$  von der Form  $2^{-m}$  ist, führt das zu der Abschätzung

$$\parallel v(P) \parallel = \lambda^{-1} \parallel v(\lambda P) \parallel = \lambda^{-1} V(\lambda P) \parallel f(\lambda P) - s(\lambda P) \parallel \leq \lambda^{n} V(P) \delta(P).$$

Da hier  $\lambda > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, muss v(P) = 0 sein. Damit ist die Behauptung von Satz 2 für die Dimension n und daher allgemein bewiesen.

Bei der durch Satz 2 gegebenen Charakterisierung des Schwerpunktes wird der Volumbegriff als bereits bekannt unterstellt. Man kann aber auch Satz 1 und Satz 2 zu einer simultanen axiomatischen Einführung von Volumen und Schwerpunkt zusammenfassen:

**Satz 3:** Seien  $\varphi: \mathfrak{P} \to \mathbb{R}$  und  $f: \mathfrak{P} \to E^n$  zwei Funktionale mit den folgenden Eigenschaften:

$$\varphi$$
 ist translations invariant und normiert, (11)

$$f$$
 ist translationsäquivariant, und es gilt  $f(P) \in \text{konv } P$ , (12)

$$\varphi f$$
 ist einfach additiv. (13)

Dann ist  $\varphi = V$  und f = s.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus den Sätzen 1 und 2, sobald gezeigt ist, dass  $\varphi$  notwendigerweise einfach additiv und definit ist. Seien  $P, Q \in \mathfrak{P}$  Polyeder mit  $(P \cap Q)^{\circ} = \varnothing$ , und sei  $t \in E^{n}$ ,  $t \neq 0$ . Nimmt man (13) in Anspruch, zunächst für die Argumente P + t und Q + t und sodann für P und Q, so sieht man bei Beachtung der Invarianz von  $\varphi$  und der Äquivarianz von f, dass  $\varphi$  einfach additiv ist. Sei nun W ein Würfel mit  $\varphi(W) = 1$ . Angenommen, es existiert ein Polyeder  $U \in \mathfrak{P}$  mit  $\varphi(U) < 0$ . Wegen (11) können wir  $W \cap U = \varnothing$  annehmen und ferner voraussetzen, dass W und U in dem Halbraum  $H^+ = \{x \in E^n \mid \langle x, t \rangle > 0\}$  liegen. Für hinreichend grosse  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist dann  $(U + \lambda t) \cap W = \varnothing$ , also gilt

$$\varphi((U + \lambda t) \cup W) = \varphi(U + \lambda t) + \varphi(W) = \varphi(U) + \varphi(W) = \varphi(U \cup W)$$

und daher

$$egin{aligned} arphi(U\ \cup\ W)\ f\ ((U+\lambda t)\ \cup\ W) &= arphi(U)\ (f(U)+\lambda t) + arphi(W)\ f\ (W) \ \\ &= arphi(U\ \cup\ W)\ f\ (U\ \cup\ W) + \lambda arphi(U)t \ \\ &\notin H^+ \end{aligned}$$

für alle grossen  $\lambda$ . Wegen

$$f((U + \lambda t) \cup W) \in \text{konv}((U + \lambda t) \cup W) \subset H^+$$

muss also  $\varphi(U \cup W) < 0$  sein. Andererseits gilt für hinreichend grosse  $\lambda$ 

$$\varphi(U \cup W) f(U \cup (W + \lambda t)) = \varphi(U \cup W) f(U \cup W) + \lambda t \in H^+$$

und

$$f(U \cup (W + \lambda t)) \in \text{konv}(U \cup (W + \lambda t)) \subseteq H^+$$
,

was  $\varphi(U \cup W) > 0$  nach sich zieht. Die Annahme war also falsch, das heisst  $\varphi$  ist definit.

Rolf Schneider, TU Berlin

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. Hadwiger, Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1957).
- [2] H. HADWIGER und R. Schneider, Vektorielle Integralgeometrie, El. Math. 26, 49-57 (1971).
- [3] R. Schneider, On Steiner Points of Convex Bodies, Israel J. Math. 9, 241–249 (1971).
- [4] R. Schneider, Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper (I), (II), Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37, 112–132, 204–217 (1972)

### Two Non-Negative Quadratic Forms

### I. Introduction

In problem E 2348 [1], L. Carlitz has given the inequality

$$\sum R_1 (r_2 + r_3) \geq \sum (r_1 + r_2) (r_1 + r_3) \tag{1}$$

where  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  and  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  denote the distances from an interior point of a triangle ABC to the vertices A, B, C and the sides a, b, c, respectively. Coupling (1) with the known lower bounds  $R_1 \geq (r_2 c + r_3 b)/a$ , etc. [2, p. 107], suggests the stronger inequality

$$F_{1} \equiv \left\{ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1 \right\} r_{1}^{2} + \left\{ \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1 \right\} r_{2}^{2} + \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right\} r_{3}^{2} \\ - \left\{ 3 - \frac{b+c}{a} \right\} r_{2} r_{3} - \left\{ 3 - \frac{c+a}{b} \right\} r_{3} r_{1} - \left\{ 3 - \frac{a+b}{c} \right\} r_{1} r_{2} \ge 0.$$
 (2)