Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders

Autor(en): **Jeger, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30649

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

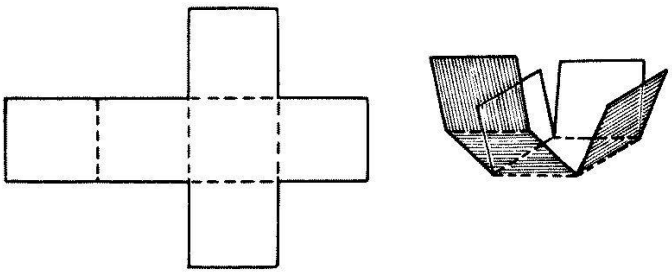
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 30 Heft 4 Seiten 73–96 10. Juli 1975

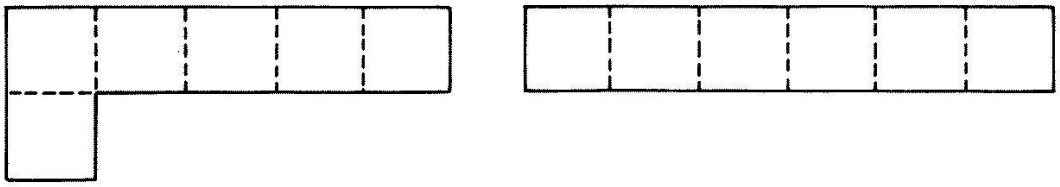
Über die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze des Würfels und des regulären Oktaeders

Will man aus steifem Papier einen Würfel herstellen, dann kann man aus dem genannten Material 6 kongruente Quadrate ausschneiden und diese auf geeignete Weise zusammenkleben. Jede Würfelkante ist dann eine Klebekante. Nimmt man anstelle der 6 Einzelquadrate ein *ebenes Netz des Würfels*, dann sind nur 7 Klebekanten erforderlich. Ein ebenes Netz des Würfels besteht aus 6 kongruenten Quadraten, die auf zulässige Weise an 5 Seiten zusammenhängen. Beim Netz in der Figur 1 sind die 5 Quadratseiten, die den Zusammenhang gewährleisten, durch unterbrochene Linien gekennzeichnet.



Figur 1

Durch das Beiwort *zulässig* wurde bereits zum Ausdruck gebracht, dass 6 Quadrate, die über 5 Seitenkanten zusammenhängen, nicht immer ein Würfelnetz darstellen. Wie man leicht bestätigt, sind zum Beispiel die beiden Anordnungen in der Figur 2 keine Würfelnetze.



Figur 2

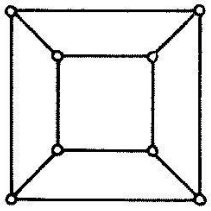
Die folgenden Untersuchungen gelten der Frage nach der Anzahl der inkongruenten ebenen Netze bei einem Würfel und bei einem regulären Oktaeder. Wir werden uns bei der Lösung dieses Problems aus der abzählenden Kombinatorik graphentheoretischer und gruppentheoretischer Hilfsmittel bedienen. Dieses Zusammenspiel verschiedener Theorien bei der Lösung einer Aufgabe, die man zunächst eher der Elementarmathematik zuweisen möchte, macht die Diskussion besonders reizvoll.

Würfel und Oktaeder sind bekanntlich duale Polyeder. Diese Beziehung ist der tiefere Grund dafür, dass die beiden Polyeder miteinander untersucht werden. Zunächst wird sich herausstellen, dass die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze beim Würfel und beim Oktaeder dieselbe ist. Die Dualität wird uns aber zugleich auch erlauben, bei einzelnen Überlegungen das jeweils einfacher traktable Polyeder heranzuziehen.

1. Die Gewinnung eines ebenen Netzes

Wir wollen uns vorerst auf den Würfel festlegen. Um eine Übersicht über die vorhandenen ebenen Netze zu erhalten, gehen wir vom bereits erwähnten Modell des Würfels aus; wir denken uns einen Würfel, der aus steifem Papier angefertigt ist. Man kann daraus leicht zu einem ebenen Netz des Polyeders gelangen, indem man die Fläche entlang geeigneter Kanten aufschneidet und hernach in die Ebene ausbreitet. Zur exakten Beschreibung dieses Vorganges bedienen wir uns nun der graphentheoretischen Terminologie. Die 8 Eckpunkte und die 12 Kanten des Würfels machen zusammen einen Graphen aus; wir nennen ihn den *Eckpunkt-Kanten-Graphen* des Würfels und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{G}_W$. Es handelt sich um einen schlichten regulären Graphen 3. Ordnung.

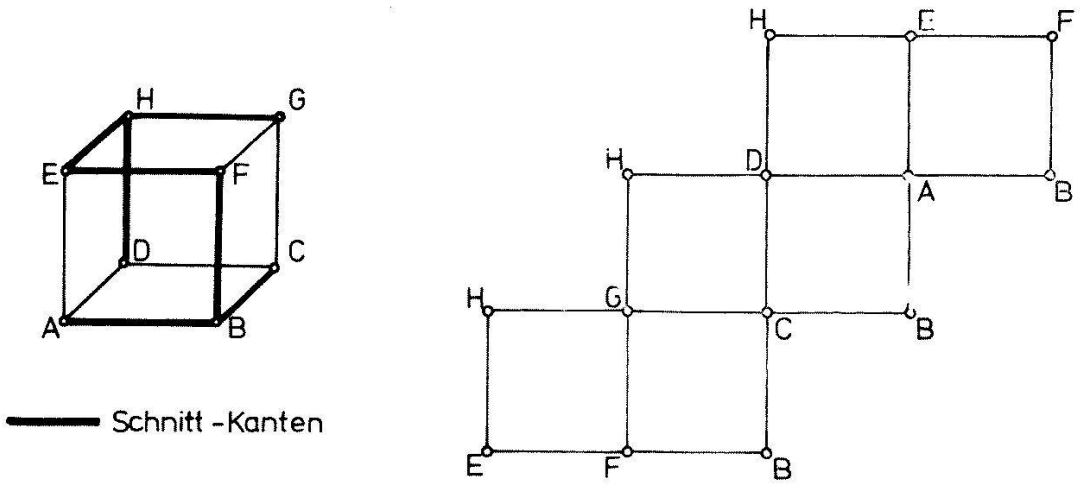
Jeder zu $\mathfrak{G}_W$ isomorphe Graph heisst ein *Würfel-Graph*. In der Figur 3 ist ein überschneidungsfreier Würfel-Graph in der Ebene aufgezeichnet.



Figur 3

Wir markieren uns jetzt im Graphen $\mathfrak{G}_W$ die Kanten, in denen bei der Gewinnung eines ebenen Netzes die Fläche aufgeschnitten werden soll und bezeichnen sie als *Schnitt-Kanten*. Die Figur 4 zeigt ein System von Schnitt-Kanten, aus dem das daneben gezeichnete ebene Netz hervorgeht. Wir wollen verabreden, dass die Netze stets so in die Ebene abgelegt werden, dass die Papier-Oberseite der Aussenseite des Würfels entspricht. Man kann sich die Aussenseite des Würfels leicht merken, wenn man Papier benutzt, das nicht beidseitig gleich gefärbt ist.

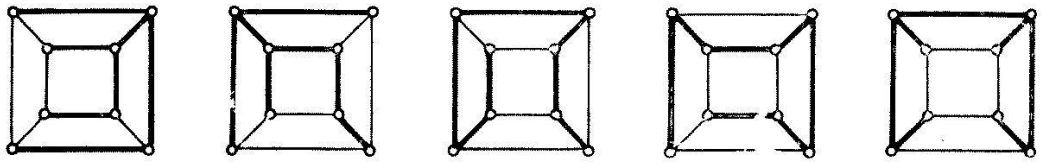
Es ist klar, dass jede Würfelecke mit einer Schnitt-Kante inzident ist. Wäre dies nicht der Fall, dann liesse sich die aufgeschnittene Fläche nicht in die Ebene ausbreiten. Die Eckpunkte des Würfels und die Schnitt-Kanten bilden zusammen einen Teil-Graphen $\mathfrak{S}_W$ von $\mathfrak{G}_W$. Der Graph $\mathfrak{S}_W$ enthält sicher keine Kreise; andernfalls würde die Fläche nach dem Aufschneiden zerfallen. Aus der Tatsache, dass die



Figur 4

ebenen Netze eines Polyeders zusammenhängend sind, folgt zugleich noch, dass der Teil-Graph $\mathfrak{S}_W$ zusammenhängend ist. $\mathfrak{S}_W$ ist also ein zusammenhängender und kreisloser Teil-Graph von $\mathfrak{G}_W$, der sämtliche Knoten (Eckpunkte des Würfels) von $\mathfrak{G}_W$ enthält. Durch diese Eigenschaften sind die *Gerüste eines Graphen* gekennzeichnet.

Die Graphentheorie lehrt, dass die Gerüste eines Graphen mit n Knoten genau n–1 Kanten aufweisen. Da $\mathfrak{G}_W$ 8 Knoten umfasst, besitzen seine Gerüste genau 7 Kanten. In der Figur 5 sind 5 verschiedene Gerüste eines Würfel-Graphen festgehalten.



Figur 5

Die Frage nach der Anzahl der verschiedenen ebenen Netze bei einem Würfel läuft jetzt darauf hinaus, die Anzahl der inkongruenten Gerüste auf dem Eckpunkt-Kanten-Graphen $\mathfrak{G}_W$ zu bestimmen. Genau besehen heisst dies folgendes. Durch die Identifikation von Gerüsten auf $\mathfrak{G}_W$, die bei einer Drehung des Würfels in sich auseinander hervorgehen, wird auf der Menge der Gerüste von $\mathfrak{G}_W$ eine Äquivalenzrelation definiert. Die zugehörigen Äquivalenzklassen liefern dann die verschiedenen ebenen Netze des Würfels. Man kann daher auch diese Äquivalenzklassen als die massgebenden kombinatorischen Figuren ansehen.

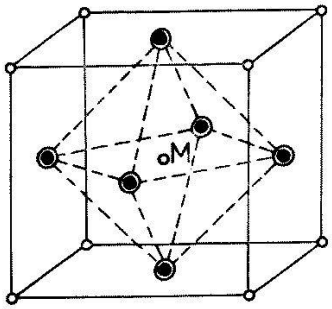
Bevor wir die Abzählung der genannten Äquivalenzklassen durchführen, wollen wir noch die Beziehung zur entsprechenden Aufgabe beim regulären Oktaeder herstellen.

Man kann für das reguläre Oktaeder die analogen Überlegungen anstellen und stellt dabei fest, dass die ebenen Netze in gleicher Weise aus den Gerüsten des Eckpunkt-Kanten-Graphen hervorgehen. Wir bezeichnen den Eckpunkt-Kanten-Graphen des regulären Oktaeders im folgenden mit $\mathfrak{G}_O$.

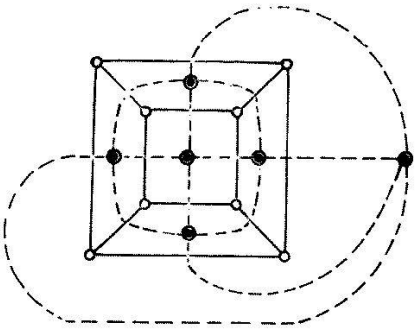
Die Gerüste von $\mathfrak{G}_W$ und $\mathfrak{G}_O$ hängen aufgrund der dualen Verwandtschaft von Würfel und Oktaeder eng miteinander zusammen. Diese Dualität äussert sich etwa

darin, dass die Seitenflächen-Mittelpunkte eines Würfels die Eckpunkte eines regulären Oktaeders sind, und umgekehrt.

Jede Drehung, die eines der beiden Polyeder in der Figur 6 in sich selbst überführt, lässt auch das andere Polyeder invariant. Die Gruppe der Drehungen, die den Würfel fest lassen, ist daher identisch mit der Gruppe der Drehungen, die das Oktaeder in sich transformieren. Wir nennen sie die *Hexaeder-Gruppe*, womit dem Würfel ein gewisser Vorzug gegeben ist.



Figur 6

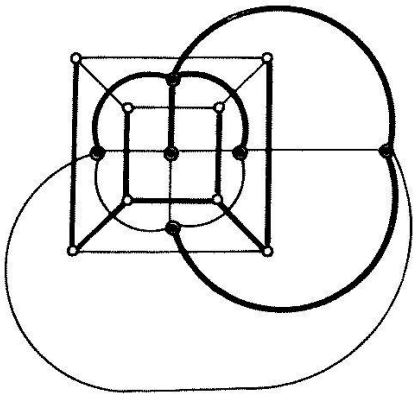


Figur 7

Wir denken uns jetzt die Eckpunkt-Kanten-Graphen der beiden Polyeder in der Figur 6 vom Punkt M aus auf eine Kugel mit dem Mittelpunkt M projiziert und anschliessend die Bild-Graphen auf der Kugel topologisch auf die konforme Ebene abgebildet. Diese Überlegung führt auf einen Würfel-Graphen $\overline{\mathfrak{G}}_W$ und einen Oktaeder-Graphen $\overline{\mathfrak{G}}_O$ in einer gegenseitigen Verkoppelung gemäss Fig. 7. Man spricht in diesem Falle von zwei *dualen ebenen Graphen*[1]). Duale ebene Graphen haben gleichviele Kanten. Ferner ist die Anzahl der Knoten des einen gleich der Anzahl der Gebiete, in welche die Ebene durch den andern Graphen zerlegt wird.

Jede Kante von $\overline{\mathfrak{G}}_W$ schneidet genau eine Kante von $\overline{\mathfrak{G}}_O$ und umgekehrt. Aus dieser Eigenschaft geht eine natürliche Paarung zwischen den Kanten der beiden Graphen hervor. Wir wollen nun daraus eine Paarung zwischen den Gerüsten von $\overline{\mathfrak{G}}_W$ und $\overline{\mathfrak{G}}_O$ konstruieren. Ist eine solche nachgewiesen, dann ist damit gezeigt, dass $\overline{\mathfrak{G}}_W$ und $\overline{\mathfrak{G}}_O$ gleichviele Gerüste besitzen.

Es sei $\overline{\mathfrak{S}}_W$ irgend ein Gerüst von $\overline{\mathfrak{G}}_W$. Die dualen Bilder jener Kanten von $\overline{\mathfrak{G}}_W$, die in $\overline{\mathfrak{S}}_W$ nicht vorkommen, führen auf einen Teil-Graphen $\overline{\mathfrak{S}}_O$ von $\overline{\mathfrak{G}}_O$. Dieser Graph $\overline{\mathfrak{S}}_O$ ist stets ein Gerüst von $\overline{\mathfrak{G}}_O$. Bevor wir den Beweis antreten, sei diese Konstruktion noch an einem Beispiel veranschaulicht (Fig. 8).



Figur 8

[1]) Jeder in die Ebene eingebettete Graph, bei dem keine Kantenüberschneidungen vorhanden sind, heisst ein ebener Graph.

Dass $\overline{\mathfrak{S}}_O$ ein Gerüst ist, kann man wie folgt einsehen. Da $\overline{\mathfrak{S}}_W$ keine Kreise enthält, ist $\overline{\mathfrak{S}}_O$ ein zusammenhängender Graph, der sämtliche Knoten von $\overline{\mathfrak{G}}_O$ umfasst. $\overline{\mathfrak{S}}_W$ hat 7 Kanten, $\overline{\mathfrak{S}}_O$ infolgedessen 5 Kanten. Ein zusammenhängender Graph mit 6 Knoten und 5 Kanten ist aber notwendigerweise ein *Baum*, im vorliegenden Falle also ein Gerüst von $\mathfrak{G}_O$.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich in der folgenden Aussage zusammenfassen:

Die Anzahl der inkongruenten ebenen Netze beim Würfel und beim regulären Oktaeder ist dieselbe. Sie stimmt überein mit der Anzahl der inäquivalenten Gerüste von $\mathfrak{G}_W$ oder $\mathfrak{G}_O$ in bezug auf die Hexaeder-Gruppe.

2. Die inäquivalenten Gerüste auf $\mathfrak{G}_W$ und $\mathfrak{G}_O$ in bezug auf die Hexaeder-Gruppe

Aus Gründen, die sich alsbald abzeichnen werden, wollen wir jetzt dem Oktaeder den Vortritt lassen.

Die Hexaeder-Gruppe induziert auf der Menge $\mathbf{G}_O$ der Gerüste von $\mathfrak{G}_O$ eine *Permutationsgruppe* $\mathfrak{H}_0 = [\mathbf{H}_0; \circ]$. Die inäquivalenten Gerüste von $\mathbf{G}_O$ in bezug auf die Hexaeder-Gruppe werden repräsentiert durch die Transitivitätsbereiche, welche diese Permutationsgruppe auf der Menge $\mathbf{G}_O$ hervorruft. Sie werden in der neueren Kombinatorik auch als die *Muster auf* $\mathbf{G}_O$ *bezüglich der Gruppe* $\mathfrak{H}_0$ bezeichnet.

Aufgrund des sogenannten Lemmas von *Burnside*[2]) beträgt die Anzahl der Transitivitätsbereiche bei einer Permutationsgruppe $\mathfrak{P} = [\mathbf{P}; \circ]$

$$t(\mathfrak{P}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{P})} \sum_{\omega \in \mathbf{P}} \chi(\omega) \, .$$

$\mu(\mathbf{P})$ ist die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{P}$ (Mächtigkeit der Menge $\mathbf{P}$). $\chi(\omega)$ bezeichnet den Charakter der Permutation $\omega \in \mathbf{P}$; dies ist die Anzahl der Objekte, die bei der Permutation ω festbleiben. Die Summe ist zu erstrecken über alle Permutationen der Gruppe $\mathfrak{P}$.

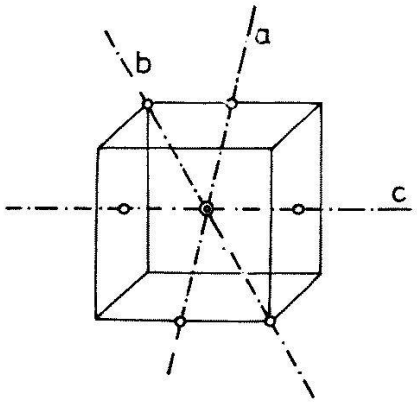
Die Anwendung dieses gruppentheoretischen Abzählverfahrens setzt eine Aufzählung der Hexaeder-Gruppe voraus. Diese umfasst

die Identität
6 Drehungen um 2zählige Achsen (Beispiel: Achse a)
8 Drehungen um 3zählige Achsen (Beispiel: Achse b)
9 Drehungen um 4zählige Achsen (Beispiel: Achse c)

Die Gruppe hat somit die Ordnung 24.

Es sei nun

Σ_a die 180°-Drehung um die Achse a
Δ_b eine 120°-Drehung um die Achse b
Δ_c eine 90°-Drehung um die Achse c
Σ_c die 180°-Drehung um die Achse c.



Figur 9

[2]) Vgl. [1], [2] und [3].

Wir bezeichnen jetzt mit ε die identische Permutation auf der Menge $\mathbf{G}_O$ und mit σ_a, δ_b, δ_c, σ_c die Permutationen auf $\mathbf{G}_O$, die aus den Drehungen Σ_a, Δ_b, Δ_c und Σ_c abgeleitet sind. Dann gilt offenbar

$$t(\mathfrak{H}_0) = \frac{1}{24}\left(\chi(\varepsilon) + 6\,\chi(\sigma_a) + 8\,\chi(\delta_b) + 6\,\chi(\delta_c) + 3\,\chi(\sigma_c)\right).$$

Aus gleichartigen Drehungen entstehen nämlich Permutationen mit denselben Charakteren.

Bestimmung von $\chi(\varepsilon)$

Die Permutation ε lässt sämtliche Gerüste von $\mathfrak{G}_O$ fest; $\chi(\varepsilon)$ ist also die Anzahl der Gerüste von $\mathfrak{G}_O$. Für die Berechnung der Zahl $\chi(\varepsilon)$ ziehen wir das Theorem von *Kirchhoff-Trent* heran[3]). Um dieses formulieren zu können, benötigen wir die sogenannte Admittanz-Matrix eines Graphen $\mathfrak{G}$. Hat $\mathfrak{G}$ die Knoten $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dann sei ϱ_i die Ordnung des Knotens P_i, und v_{ij} bezeichne die Anzahl der Verbindungskanten von P_i mit P_j (allfällig vorhandene Schlingen werden sowohl für ϱ_i als auch für v_{ij} doppelt gezählt). Ist weiter δ_{ij} das Kronecker-Symbol, dann heisst die symmetrische $n \times n$-Matrix A mit den Elementen

$$a_{ij} = \delta_{ij}\,\varrho_i - v_{ij}$$

die *Admittanz-Matrix* des Graphen $\mathfrak{G}$. Es sei jetzt weiter A_i die Matrix, die aus A hervorgeht, wenn man dort die i-te Zeile und die i-te Kolonne herausstreicht. Das Theorem von *Kirchhoff-Trent* besagt, dass det A_i unabhängig von der Zahl i ist und dass dieser Wert die Anzahl der Gerüste von $\mathfrak{G}$ darstellt.

Zum Eckpunkt-Kanten-Graphen $\mathfrak{G}_O$ gehört bei geeigneter Numerierung der Knoten die Admittanz-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Streicht man in A die 6. Zeile und die 6. Kolonne, so verbleibt die Matrix

$$A_6 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Man findet det $A_6 = 384$; der Graph $\mathfrak{G}_O$ hat also 384 verschiedene Gerüste.

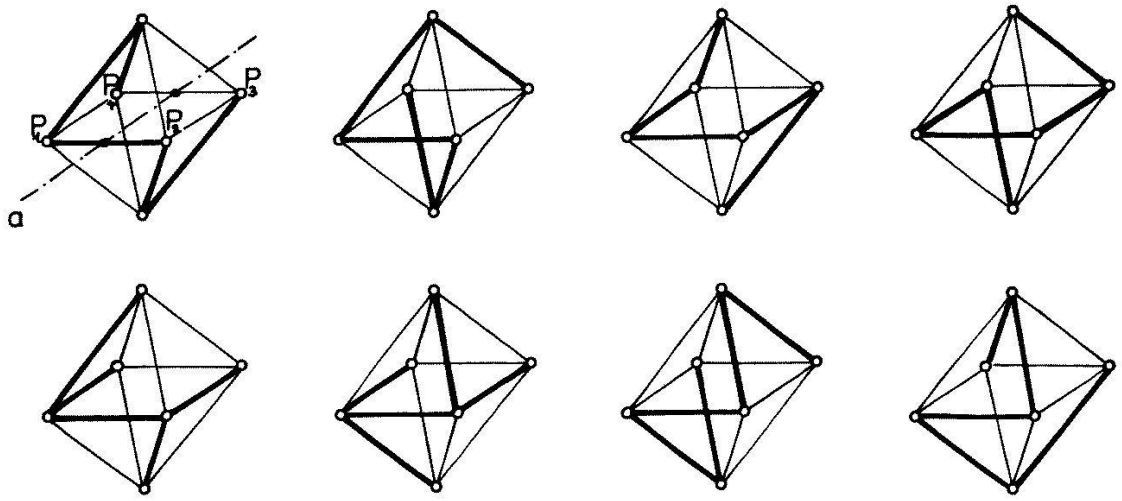
Der Graph $\mathfrak{G}_W$ hat 8 Knoten; seine Admittanz-Matrix ist daher eine 8×8-Matrix, was die Berechnung der Gerüst-Anzahl etwas aufwendiger macht. Damit erklärt sich jetzt die Bevorzugung des Oktaeders.

Bestimmung von $\chi(\sigma_a)$

$\chi(\sigma_a)$ ist die Anzahl der Gerüste von $\mathfrak{G}_O$, die bei der Permutation σ_a invariant bleiben. Da ein Gerüst 5 Kanten hat, muss ein bei σ_a festbleibendes Gerüst eine

[3]) Vgl. [4].

Kante enthalten, deren Mittelpunkt auf a liegt. Es gibt offenbar 8 bezüglich σ_a invariante Gerüste mit der Kante P_1P_2; sie sind in der Figur 10 aufgeführt. Daneben gibt es noch ebensoviele bei σ_a invariante Gerüste mit der Kante P_3P_4, so dass $\chi(\sigma_a) = 16$ ist.



Figur 10

Bestimmung von $\chi(\delta_b)$, $\chi(\delta_c)$ und $\chi(\sigma_c)$

Eine 120°-Drehung des Oktaeders in sich induziert auf der Menge der Kanten von $\mathfrak{G}_O$ eine Permutation mit lauter Zyklen der Länge 3. Da ein Gerüst 5 Kanten aufweist, kann hierbei kein Gerüst fest bleiben; es ist also $\chi(\delta_b) = 0$.

Aus einer 90°-Drehung geht in gleicher Weise eine Permutation mit lauter Vierer-Zyklen hervor, so dass auch $\chi(\delta_c) = 0$ ist.

Schliesslich gehört zur 180°-Drehung mit der Achse c eine Permutation auf der Menge der Kanten von $\mathfrak{G}_O$ mit 4 Zyklen der Länge 2, was wiederum ausschliesst, dass ein Gerüst in sich selbst übergeht. Daraus folgt, dass ebenso $\chi(\sigma_c) = 0$ ist.

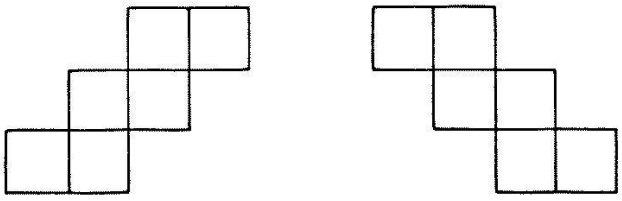
Mit dem Lemma von *Burnside* erhält man nun für die Anzahl der Gerüste von $\mathfrak{G}_O$

$$t(\mathfrak{H}_0) = \frac{1}{24}\,(384 + 6.16) = 20\,.$$

Damit steht jetzt das folgende Ergebnis fest:

Bei Verwendung von Papier mit unterscheidbaren Seiten gibt es beim Würfel und beim regulären Oktaeder je 20 inkongruente ebene Netze.

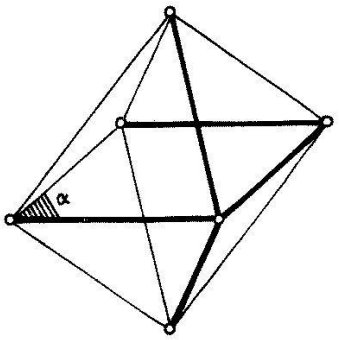
Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die beiden Seiten eines Papiers durch verschiedene Färbung unterscheidbar gemacht werden können. Benutzt man beidseitig gleich gefärbtes Papier, dann sind von den 20 festgestellten Netzen einige Paare zu identifizieren. Ein solches Paar besteht aus zwei Netzen, die durch eine Umwendung auseinander hervorgehen. Die Figur 11 zeigt ein solches Paar für den Würfel.



Figur 11

3. Die Muster in bezug auf die volle Symmetrie-Gruppe von Würfel und Oktaeder

Man kann direkt zu den neuen Äquivalenzklassen gelangen, wenn man an die Stelle der Hexaeder-Gruppe die *volle Symmetrie-Gruppe des Würfels* treten lässt. Zur Hexaeder-Gruppe sind dann noch 24 ungleichsinnige Kongruenz-Transformationen zu adjungieren, nämlich die Spiegelung am Mittelpunkt des Würfels, 14 Dreh-Spiegelungen und 9 Ebenen-Spiegelungen. Mit ähnlichen Überlegungen wie im Falle der gleichsinnigen Kongruenzen lässt sich zeigen, dass nur für die 3 Spiegelungen an den Diagonalebenen des Oktaeders (für den Würfel sind dies die Mittelparallelebenen zu diametralen Seitenflächen; vgl. Fig. 6) invariante Gerüste von $\mathfrak{G}_O$ vorhanden sind. Ist Σ_α die Spiegelung an der Diagonalebene α und σ_α die zugehörige Permutation auf der Menge der Gerüste von $\mathfrak{G}_O$, dann ist $\chi(\sigma_\alpha) = 16$. Man kann dies mühelos der Figur 12 entnehmen, in der ein bei σ_α invariantes Gerüst herausgehoben ist.

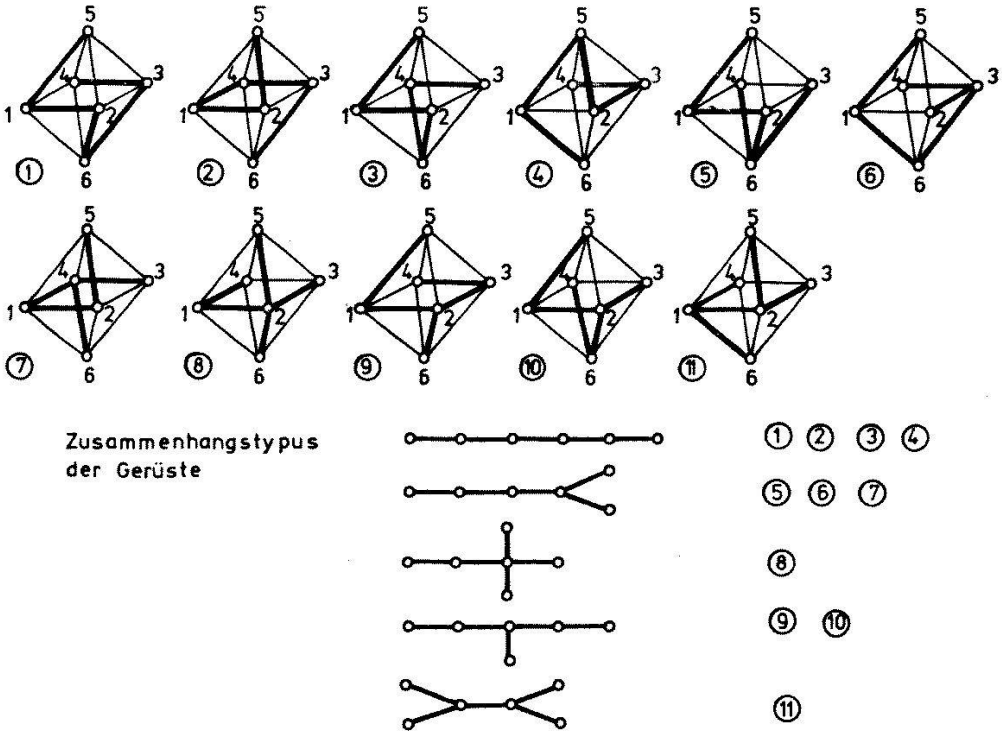


Figur 12

Die Anzahl der Muster beträgt somit bei Zugrundelegung der vollen Symmetrie-Gruppe

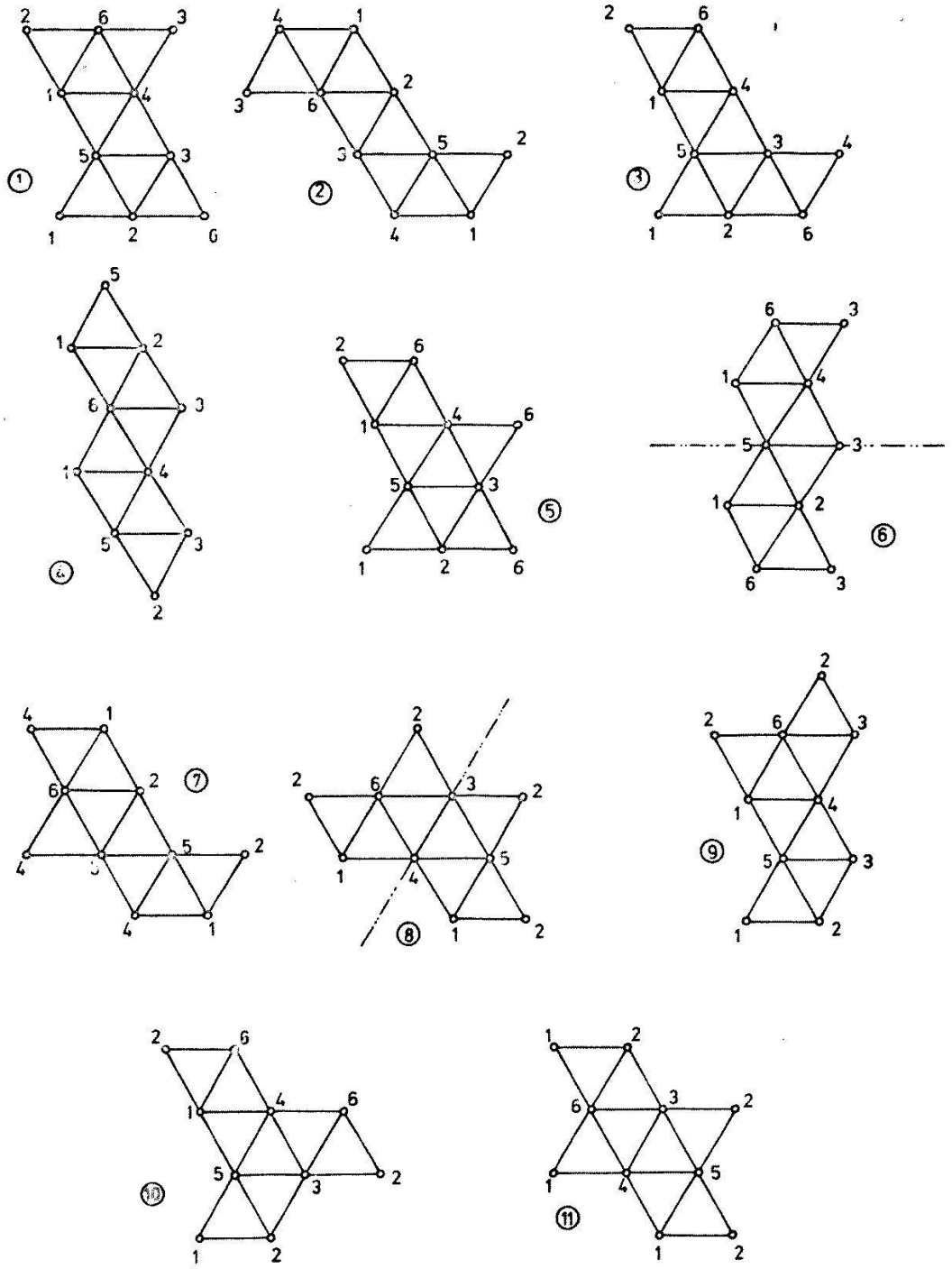
$$t(\overline{\mathfrak{H}}_0) = \frac{1}{48}\,(384 + 6.16 + 3.16) = 11\,.$$

In den Figuren 13 und 14 sind die 11 inkongruenten Gerüste von $\mathfrak{G}_O$ und die dazugehörenden ebenen Netze des regulären Oktaeders zusammengestellt.



Figur 13

Ein Vergleich der Winkel zwischen den betreffenden Oktaeder-Kanten bei den Gerüsten vom gleichen Zusammenhangstypus zeigt, dass tatsächlich 11 inkongruente Gerüste vorliegen.



Figur 14

Die beiden Netze mit den Nummern 6 und 8 weisen eine Symmetrieachse auf. Beim Umwenden der übrigen 9 Netze erhält man 9 neue Figuren, die zusammen mit den vorhandenen 11 Netzen die 20 Netz-Klassen repräsentieren, die bei Verwendung von Papier mit unterscheidbaren Seiten auftreten.

Die Aufzählung der 11 inkongruenten Netze des Würfels bei beidseitig gleich gefärbtem Papier sei dem Leser überlassen.

Die Reinzeichnungen zu den Figuren hat Herr C. Niederberger hergestellt, wofür ihm an dieser Stelle herzlich gedankt sei.

M. Jeger, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C. Berge, *Principes de Combinatoire*, (Paris 1968).
[2] N. G. de Bruijn, *Polyas Abzähltheorie. Muster für Graphen und chemische Verbindungen.* Selecta Mathematica III, Heidelberger Taschenbücher, Band 86, p. 1–26. (Berlin–Heidelberg–New York, 1971).
[3] M. Jeger, *Einführung in die Kombinatorik*, Band 2, (Stuttgart 1975; erscheint demnächst).
[4] H. Sachs, *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen*, (Teil I, Leipzig 1970; Teil II, Leipzig 1972).

Groups and Fields in Z_n

It can easily be verified that $\{2, 4, 6, 8\}$ is a group under multiplication mod 10 with 6 as the identity and that $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ is a field under addition mod 10 and multiplication mod 10. The purpose of this paper is to characterize the subsets of Z_n which are groups under multiplication mod n and those which are fields under addition and multiplication mod n. Some of the results on subgroups of Z_n given here are equivalent to some of the results given by Hewitt and Zuckermann [1], but are of a substantially different form.

In the following $U_n = \{m \mid (n, m) = 1\}$ will denote the group of units in Z_n, ϕ will denote the Euler phi function and a small Roman letter will denote an integer or the residue class of the integer in Z_n; the context will indicate which is intended.

Proposition 1. If $n = a\,b$ and $(a, b) = 1$, then $a^{\phi(b)}$ is idempotent in Z_n.

Proof: $a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$ by Euler's theorem. Hence, multiplying through by $a^{\phi(b}$ we have $(a^{\phi(b)})^2 \equiv a^{\phi(b)} \pmod{n}$ since $n = a\,b$ and $(a, b) = 1$. Therefore, $(a^{\phi(b)})^2 = a^{\phi(b)}$ in Z_n.

Lemma 1. If $(x, n) = d$ and $(d, n/d) = 1$, then $x \equiv d\,u \pmod{n}$ where $u \in U_n$. Hence, $x \in d\,U_n$.

Proof: Since $(d, n/d) = 1$, there exists a t_0 such that $x/d + t_0\,n/d \equiv 1 \pmod{d}$. Let $u = x/d + t_0\,n/d$. Then $(u, d) = (1, d) = 1$ and $(u, n/d) = (x/d, n/d) = 1$. Hence, $(u, n) = 1$ and $u \in U_n$. Also, $d\,u = x + t_0\,n \equiv x \pmod{n}$.

Proposition 2. If $(c, n) = d$ and $(d, n/d) = 1$, then $c\,U_n = d\,U_n$.

Proof: By Lemma 1, there is a $u \in U_n$ such that $c \equiv d\,u \pmod{n}$. Hence, $c\,U_n = d\,u\,U_n = d\,U_n$.

Proposition 3. If $n = a\,b$ and $(a, b) = 1$, then $a^{\phi(b)}\,U_n = a\,U_n$.

Proof: This follows immediately from Proposition 2 by observing $(a^{\phi(b)}, n) = a$ and $(a, n/a) = (a, b) = 1$.

The following theorem gives a method for constructing subsets of Z_n which are groups. The example in the first paragraph is obtained by taking $n = 10$ and $a = 2$.